

MARTINO ZANETTI

Onde e Oscillazioni

Appunti del corso del Professor Vailati

2018

©2018 Martino Zanetti
Stampato in proprio

Soggetto alla licenza Creative Commons
Ultimo aggiornamento il 7 giugno 2019

Indice

1	Introduzione: onde e oscillazioni	6
I	Oscillatori a un grado di libertà	7
2	Oscillatore armonico semplice	8
2.1	Costruzione del modello: equazione del moto	8
2.1.1	Sovrapposizione dei moti	10
2.2	Considerazioni energetiche: approssimazione parabolica	10
2.3	Soluzione dell'equazione del moto: la legge oraria	12
2.3.1	Ricerca di A e φ	13
2.4	Considerazioni energetiche: energia cinetica, potenziale e meccanica del sistema	14
3	Oscillatore armonico smorzato	17
3.1	Equazione del moto	17
3.2	Soluzioni dell'equazione del moto: la legge oraria	18
3.2.1	Delta positivo $\Delta > 0$	18
3.2.2	Delta nullo $\Delta = 0$	18
3.2.3	Delta negativo $\Delta < 0$	19
3.2.4	Ricerca di A e φ	19
3.2.5	Energia meccanica	21
4	Oscillatore armonico forzato e smorzato	22
5	Complementi	23
II	Oscillatori a infiniti gradi di libertà	24
6	Introduzione: rilevanza storica	25

7	Introduzione al modello: la corda vibrante	26
7.1	Equazione di D'alembert	26
7.2	Soluzione generale dell'equazione di D'Alembert	26
8	Trasporto di energia	27
9	Passaggio da un mezzo di propagazione a un altro	28
III	Acustica	29
10	Costruzione del modello	30
10.1	Equazione di D'alembert	30
11	Il modello tridimensionale	31
11.1	Fonometria	31
IV	Cenni di analisi di Fourier	32
12	Applicazioni della trasformata di Fourier in ottica	33
12.1	Concetti preparatori	33
12.2	Delta di Dirac	34
12.3	Una fenditura	36
12.4	Interferenza tra due sorgenti puntiformi	37
12.5	Reticolo di diffrazione	38
V	Fenomeni specificatamente ondulatori	42
VI	Ottica	43
13	Ottica fisica	44
14	Ottica geometrica	45
14.1	Diottri	45
14.2	Lenti sottili	45
14.3	Specchi	45
15	Arcobaleno	46
15.1	Dispersione cromatica	46
15.2	Fisica dell'arcobaleno	46

15.2.1	Costruzione del modello	47
15.2.2	Esistenza e unicità di β_{min}	49
15.2.3	Struttura arcobaleno	51
15.2.4	Arcobaleno secondario e Fascia di Alessandro	51
16	Polarizzazione della luce	54

Capitolo 1

Introduzione: onde e oscillazioni

Credo che il senso del corso di Onde e Oscillazioni sia quello di fornire agli studenti del primo anno di Fisica alcuni strumenti necessari per affrontare corsi successivi, oltre che la conoscenza degli argomenti più prettamente fenomenologici trattati, propedeutici anche al laboratorio del secondo semestre e a quello di ottica dell'anno successivo.

Resta il fatto che buona parte di ciò che vedremo risulta di per sé molto interessante, in particolare per chi si stesse affacciando al mondo della fisica e comincia a confrontarsi con i fenomeni in modo decisamente più rigoroso e analitico rispetto a come si è fatto alle superiori.

Prima di iniziare forniamo anche un paio di definizioni:

ONDA Perturbazione generata da una sorgente e che si propaga nel tempo e nello spazio, trasportando energia (o quantità di moto) senza comportare un associato spostamento di materia.

OSCILLAZIONE É la variazione periodica armonica (di solito nel tempo) di una quantità come la posizione di un punto materiale. Spesso viene usato il termine *vibrazione* per indicare un'oscillazione non armonica (o particolarmente rapida).

Parte I

Oscillatori a un grado di libertà

Capitolo 2

Oscillatore armonico semplice

2.1 Costruzione del modello: equazione del moto

Incominciamo il nostro percorso dallo studio del sistema più semplice che si possa immaginare: una massa puntiforme (*punto materiale*) collegata orizzontalmente ad una molla ideale, di massa nulla, a sua volta fissata al capo opposto. La massa è libera di muoversi lungo l'asse della molla senza attriti.

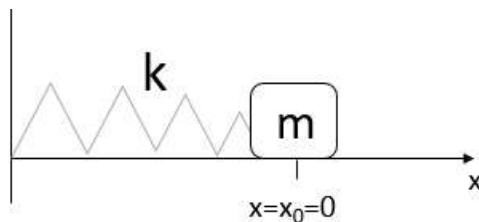


Figura 2.1 – Sistema massa-molla

Per costruire un modello in grado di descrivere ottimamente molti sistemi simili dobbiamo operare alcune approssimazioni (cosa che faremo svariate volte, anche più avanti):

massa puntiforme: trattiamo la massa m come se fosse perfettamente rigida e non potesse ruotare

assenza di attriti: oltre a quelli dinamici della massa, anche quelli viscosi interni alla molla

molla ideale priva di massa e perfettamente elastica (risponde linearmente alle sollecitazioni, cioè segue la legge di Hooke)

Sappiamo che in un punto di equilibrio stabile l'energia potenziale ha un minimo, quindi $\nabla U = 0$.

Nel nostro caso poniamo $x = x_0$ come punto di equilibrio, in cui posizionando la massa il sistema non oscilla, in quanto soggetto a forza nulla. In termini matematici, usando la legge di Hooke

$$x = x_0 \Rightarrow F_h = -k(x - x_0) = 0$$

A questo punto, posto $x_0 = 0$, e mettendo a sistema la legge di Hooke e quella di Newton $F = m \cdot a$, si ha

$$m a = -k x$$

$$m \ddot{x} + k x = 0 \tag{2.1}$$

con $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$; l'equazione 2.1 viene detta *equazione del moto* di un oscillatore armonico semplice.

Nota: in generale le equazioni del moto sono equazioni le cui soluzioni sono funzioni¹ (del tempo e dello spazio) che descrivono il moto del sistema. Ogni volta, quindi, che riusciamo a scrivere un'equazione del moto, il passo successivo che compiamo è la ricerca delle sue soluzioni.

L'equazione 2.1 è

- **differenziale del secondo ordine**
- **lineare** (ogni termine dipendente da $x(t)$ è *linearmente* dipendente da $x(t)$ o da sue derivate)
- **omogenea** (ogni termine dipende da $x(t)$)
- a **coefficienti costanti** (m e k sono costanti)

Sostituendo nell'equazione $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$ e dividendo per m , abbiamo

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

come somma di una *componente inerziale* e una *componente elastica*, in cui

¹Ti sarà tutto più chiaro dopo aver trattato nel corso di Analisi 2 le equazioni differenziali.

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è detta *pulsazione*
- $T := \frac{2\pi}{\omega_0}$ è detto *periodo*
- $\nu := \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ è detta *frequenza* e spesso indicata anche con f

2.1.1 Sovrapposizione dei moti

A causa della linearità della 2.1, per trovare una soluzione dell'equazione del moto $x(t)$ (detta *legge oraria*) si può applicare il *principio di sovrapposizione*² per due generiche soluzioni x_1 e x_2 .

Mostriamolo:

$$x(t) = \alpha[x_1(t)] + \beta[x_2(t)]$$

da cui otteniamo per sostituzione nella (1.1)

$$\underbrace{\alpha[\ddot{x}_1(t)] + \beta[\ddot{x}_2(t)]}_{\ddot{x}(t)} + \underbrace{\omega_0^2 \alpha[x_1(t)] + \omega_0^2 \beta[x_2(t)]}_{\omega_0^2 x(t)} = 0$$

da cui

$$\alpha[\ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t)] + \beta[\ddot{x}_2(t) + \omega_0^2 x_2(t)] = 0$$

dove è evidente che la composizione dei due moti è descritta dalla loro combinazione lineare; ovvero vale il principio di sovrapposizione.

□

2.2 Considerazioni energetiche: approssimazione parabolica

Una porzione infinitesima di lavoro è data da

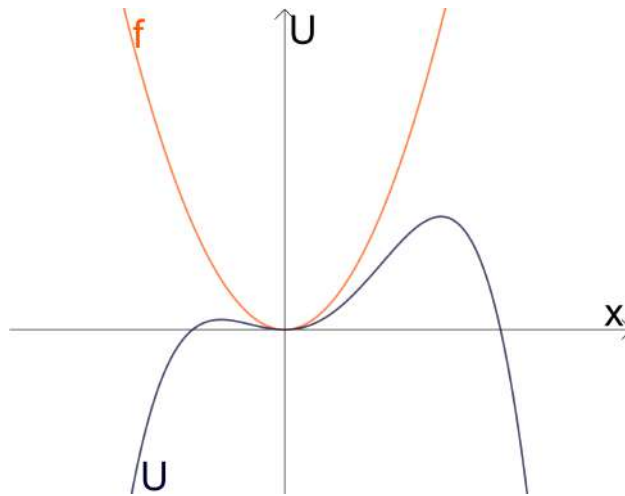
$$dW = F \cdot dx = -dU$$

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$F(x) = -\nabla U$$

che si annulla in un punto di equilibrio stabile.

²**Principio di sovrapposizione:** in un sistema dinamico lineare l'effetto di una somma di perturbazioni è uguale alla somma degli effetti prodotti da ciascuna perturbazione.



Sviluppando in serie di Taylor la funzione $U(x)$ (centrata in $x_0 = 0$), si ha

$$U(x) = \underbrace{U(0)}_a + \underbrace{\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=0}}_b x + \underbrace{\frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=0}}_c \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (2.2)$$

Dove $a = 0$ per costruzione, $b = 0$ perché $x = 0$ è punto di minimo, $c = \alpha \geq 0$.
 Siccome $F = -\frac{dU}{dx}$, si ha

$$-\frac{d^2U}{dx^2} = -k = \frac{dF}{dx}$$

$$F = \int_0^x (-k) dx = -k x$$

che è la legge di Hooke.

Dalla 2.2 abbiamo inoltre

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 + o(x^2)$$

dove l'o-piccolo indica l'entità dell'approssimazione che abbiamo fatto.

Evidentemente lo stesso discorso può essere esteso al caso tridimensionale.

Quello che abbiamo trovato è quindi che in un intorno di un punto di minimo energetico, un qualsiasi sistema fisico avrà comportamenti molto simili a quello di un sistema massa-molla.

2.3 Soluzione dell'equazione del moto: la legge oraria

L'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0$$

ha come equazione caratteristica³

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

per cui $\lambda = \pm i\omega_0$.

La soluzione dell'equazione ha quindi forma

$$x(t) = e^{\lambda t} = e^{\pm i\omega_0 t}$$

a meno di una costante moltiplicativa A (ampiezza).

Infatti

$$\underbrace{A e^{\lambda t}}_{\text{derivo 2 volte}} \longrightarrow \underbrace{A \lambda^2 e^{\lambda t}}_{\ddot{x}} = \underbrace{-\omega_0^2 A e^{\lambda t}}_{-\omega_0^2 x} \longrightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 \implies \lambda = \pm i\omega_0$$

□

Dalle formule di Eulero sappiamo che

$$\begin{cases} e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t) \\ e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t) \end{cases} \quad (2.3)$$

da cui

$$\begin{cases} \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \\ \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \end{cases}$$

quindi⁴ $x(t)$ assume anche la forma

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) \quad (2.4)$$

³La caratteristica di una equazione differenziale si ottiene ponendo λ^n moltiplicato per il coefficiente di ogni funzione derivata $x^{(n)}(t)$ nell'equazione stessa. Ad esempio l'equazione

$$x'' + ax' + b = 0$$

ha come caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda = 0$$

⁴È un risultato della teoria delle equazioni differenziali. Esiste una dispensa, *Tips per lo scitto di Analisi 2* nella quale è tutto spiegato. Oppure in qualsiasi libro di Analisi 2.

come combinazione lineare (\sim sovrapposizione) delle soluzioni 2.3 $x(t) = \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)$ e $x(t) = \cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)$. Osserviamo come in questo caso a e b indichino le condizioni iniziali del moto⁵

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = b \cos(0) + a \sin(0) = b \\ \dot{x}(0) = v_0 = a\omega_0 \cos(\omega_0 t) - b\omega_0 \sin(\omega_0 t) = a\omega_0 \Rightarrow a = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$

da cui giungiamo alla **soluzione del moto**

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Nota: abbiamo invertito a e b in quanto nella 2.4 essi erano stati scelti arbitrariamente. Questa gabola matematica ha un corrispettivo nella fisica del sistema: invertendo i coefficienti il moto è identico a meno di uno sfasamento.

2.3.1 Ricerca di A e φ

Resta il fatto che la forma della nostra soluzione è difficile da interpretare ad occhio, non mostrando immediatamente le caratteristiche notevoli del moto, come la sua ampiezza e lo sfasamento iniziale... ci piacerebbe raggiungere una forma del tipo

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.5)$$

dove

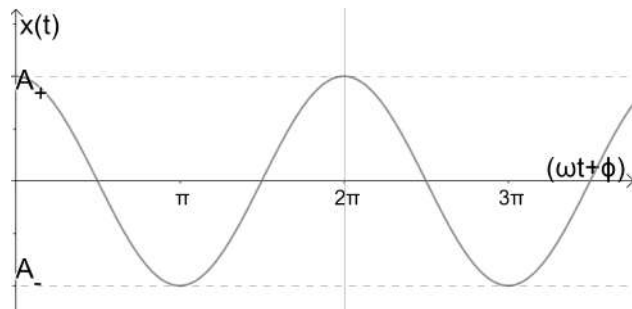
- A è l'*ampiezza* delle oscillazioni
- φ è la *costante di fase* o *sfasamento*
- $(\omega_0 t + \varphi) =: \Phi$ è la *fase* dell'oscillazione

Ci chiediamo a questo punto se ci sia davvero una implicazione $(x_0, v_0) \Rightarrow (A, \varphi)$ che metta le due coppie in relazione univoca...

Ricordiamo che $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, quindi, procedendo a ritroso a partire dalla 2.5, si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= A[\cos(\omega_0 t) \cos \varphi - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi] \\ &= \underbrace{A \cos \varphi}_{x_0} \cos(\omega_0 t) - \underbrace{A \sin \varphi}_{\frac{v_0}{\omega_0}} \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

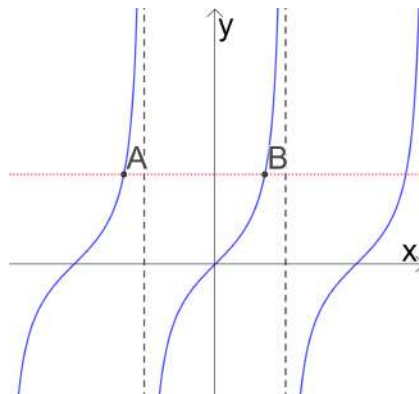
⁵L'ordine n di un'equazione differenziale richiede n condizioni iniziali, dette *condizioni al contorno*, affinché la soluzione sia univocamente determinata. In questo caso $n = 2$ e le condizioni sono sull'ampiezza del moto (dipendente da v_0) e sulla posizione iniziale del sistema (φ).



Da cui abbiamo le soluzioni

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi \\ -A \sin \varphi = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ \tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \right) \end{cases} \quad (2.6)$$

Nota: A dipende dalle condizioni iniziali, oltre che da k e m (attraverso ω_0), e ne è determinata univocamente. La funzione *tangente* invece non è iniettiva su $[-\pi, \pi]$, quindi per determinare φ bisogna ricorrere anche al buonsenso...



Ad esempio nel caso riportato in figura, posto $x = \varphi$ e $y = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$, e data la soluzione $y = 2$, come posso disambiguare le coppie A e B ?

2.4 Considerazioni energetiche: energia cinetica, potenziale e meccanica del sistema

Sappiamo che l'energia meccanica totale è definita come somma di energia cinetica e potenziale

$$E = U + K$$

dove

$$U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2$$

$$K(x) = \frac{1}{2}m \dot{x}^2$$

Notiamo quindi in particolare che U è proporzionale al quadrato della posizione, mentre K al quadrato della velocità, rispettivamente

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

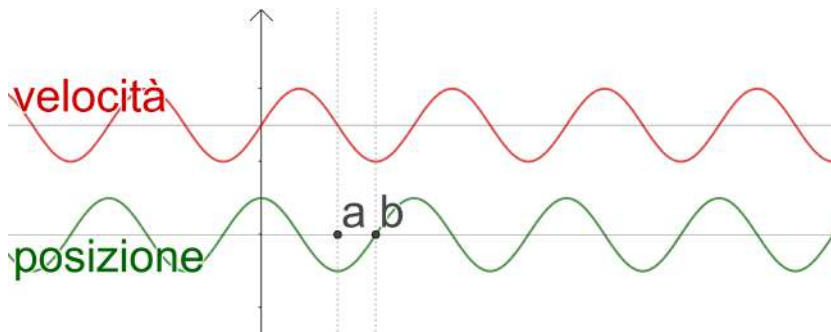


Figura 2.2 – x e \dot{x} sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$, un quarto del loro periodo: si dice che sono in *quadratura di fase*.

Per sostituzione troviamo infine le espressioni di U e K in funzione del tempo

$$U(x) = \frac{1}{2}\alpha A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.7)$$

$$K(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.8)$$

perciò l'energia totale meccanica è pari al valore massimo che ciascuna delle due energie può assumere: questo perché esiste una condizione del sistema oscillante in cui tutta l'energia è cinetica (quando se è nel punto di equilibrio, dove la forza elastica è nulla; analiticamente quando l'argomento del coseno è multiplo di π) e una in cui tutta l'energia è potenziale (quando il sistema è istantaneamente fermo nel punto di ampiezza A , dove la forza elastica è massima; analiticamente quando l'argomento del seno è multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$)

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\alpha A^2}_{U_{max}} = \underbrace{\frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2}_{K_{max}}$$

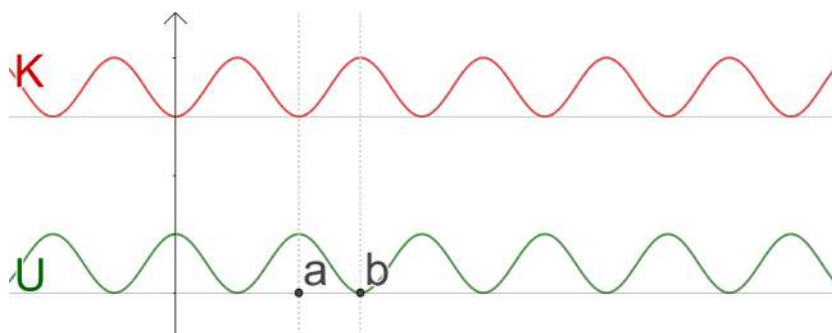


Figura 2.3 – U e K sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$, metà del loro periodo: si dice che sono in *controfase*.

Capitolo 3

Oscillatore armonico smorzato

3.1 Equazione del moto

Fino a questo momento abbiamo analizzato il comportamento di sistemi conservativi, nei quali il moto armonico oscillatorio è *reversibile*, ovvero $x(t) = x(-t)$.

In presenza di *termini dissipativi*, invece, il moto ha una dipendenza dal tempo: infatti si ha

$$F_{attr} = -\gamma 2 m \dot{x} \quad \text{con} \quad [\gamma] = s^{-1}$$

da cui

$$m\ddot{x} + 2\gamma m \dot{x} + kx = 0$$

dal momento che forza elastica, forza di attrito e quindi accelerazione sono sempre concordi.

Dividendo per m si ha l'*equazione del moto armonico smorzato*

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.1}$$

L'equazione 3.1 è

- **differenziale del secondo ordine**
- **lineare**
- **omogenea**

tuttavia si presenta in una forma difficile da risolvere con l'aiuto di *seni* e *coseni*: ricorriamo perciò ad una funzione esponenziale complessa (esponente in \mathbb{C}), più semplice da trattare

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

In questo modo la 3.1 diventa

$$\lambda^2 A e^{\lambda t} + 2\gamma \lambda A e^{\lambda t} + \omega_0^2 A e^{\lambda t} = 0$$

che può essere semplificata, essendo $A e^{\lambda t} \neq 0 \quad \forall t \neq +\infty$:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

che è un'equazione algebrica di gran lunga più semplice della 3.1. Le soluzioni sono date infatti da

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (3.2)$$

di cui andiamo a studiare i tre casi per $\Delta = \gamma^2 - \omega_0^2$ maggiore, uguale o minore di zero.

3.2 Soluzioni dell'equazione del moto: la legge oraria

3.2.1 Delta positivo $\Delta > 0$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \gamma > \omega_0$$

Abbiamo due radici reali distinte

$$\lambda_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

quindi la soluzione generale (come combinazione lineare delle due soluzioni $A e^{\lambda t}$ con $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$) è della forma

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$$

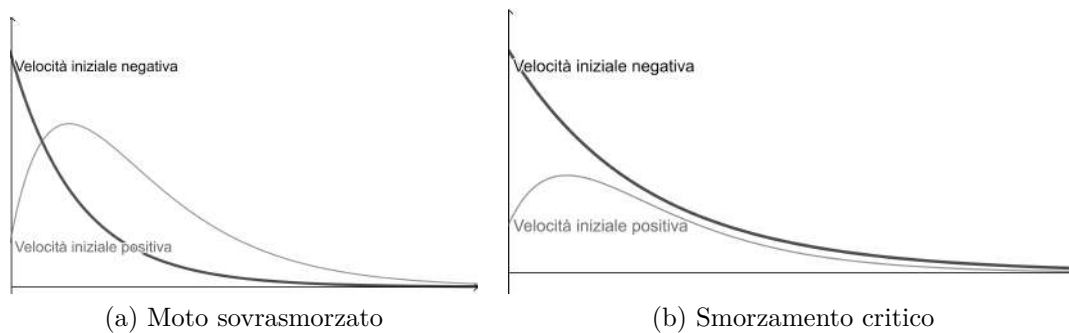
Siccome però λ_1 e λ_2 sono negative, il moto non è oscillatorio: esso è *aperiodico* e viene detto **moto sovrasmorzato** (a).

3.2.2 Delta nullo $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \gamma = \omega_0$$

Abbiamo due radici reali coincidenti

$$\lambda = -\gamma$$



quindi la soluzione generale¹ è della forma

$$x(t) = Ate^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} = \underbrace{(A)}_{v_0} t + \underbrace{(B)}_{x_0} e^{-\gamma t}$$

Anche in questo caso il sistema non è in grado di portare a termine un'oscillazione completa: la situazione è al limite tra il moto sovrasmorzato e quello "sottosmorzato"; siamo quindi in condizioni di **smorzamento critico** (b).

3.2.3 Delta negativo $\Delta < 0$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \gamma < \omega_0$$

Abbiamo due radici complesse distinte

$$\lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Definiamo $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. La soluzione generale è quindi della forma

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} \\ &= ae^{(-\gamma+i\omega)t} + be^{(-\gamma-i\omega)t} \\ &= e^{-\gamma t}(ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

3.2.4 Ricerca di A e φ

Ancora una volta volgiamo però ricondurci ad una forma del tipo

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

¹Dalla teoria delle equazioni differenziali: se si hanno due soluzioni coincidenti la soluzione generale è combinazione lineare delle due soluzioni, di cui una compare come coefficiente del grado zero e l'altra come coefficiente del grado uno dell'incognita, in questo caso il tempo.

Mostriamo che si può fare, con A e φ identificate univocamente.

Lavorando a ritroso, e ricordando la relazione di Eulero $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ abbiamo

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} A \left(\frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2} \right) \\ &= e^{-\gamma t} \left[\underbrace{\frac{A}{2} e^{i\varphi}}_a e^{\omega t} + \underbrace{\frac{A}{2} e^{-i\varphi}}_b e^{\omega t} \right] \end{aligned}$$

quindi

$$ab = \frac{A^2}{4} \quad \Rightarrow \quad A^2 = 4ab$$

inoltre

$$a + b = A \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) = A \cos(\varphi)$$

e quindi $\cos(\varphi) = \frac{a+b}{\sqrt{4ab}}$. Giungiamo così a

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \tag{3.3}$$

dove

- $a = \frac{A}{2} e^{i\varphi}$
- $b = \frac{A}{2} e^{-i\varphi}$
- $\cos(\varphi) = \frac{a+b}{\sqrt{4ab}}$
- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

□

Vediamo ora di individuare la relazione che ci permette di valutare A e φ a partire dalle condizioni iniziali

$$x(0) = x_0 = A \cos(\varphi)$$

$$v = \dot{x}(t) = -A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) - A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A\omega \sin(\varphi) - A\gamma \cos(\varphi) = -A\omega \sin(\varphi) - \gamma x_0 = v_0$$

$$\begin{cases} x_0 = A \cos(\varphi) \\ \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} = -A \sin(\varphi) \end{cases} \tag{3.4}$$

da cui, sommando i quadrati

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \right)^2$$

$$A = \sqrt{\underbrace{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}_{\text{semplice}} + \underbrace{\frac{2v_0\gamma x_0}{\omega^2} + \frac{\gamma^2 x_0^2}{\omega^2}}_{\text{smorzamento}}}$$

dove abbiamo, come evidenziato dalle graffe, una componente equivalente a quella del moto armonico semplice e una dovuta all'introduzione di uno smorzamento (dipendente cioè da γ).

Dal rapporto tra le 3.4 si ha invece

$$\tan(\varphi) = - \underbrace{\frac{v_0}{x_0\omega}}_{\text{semplice}} - \underbrace{\frac{\gamma}{\omega}}_{\text{smorzamento}}$$

Si noti che di questi due addendi il secondo è spesso trascurabile rispetto al primo, a parte nei casi (non così rari) in cui la velocità iniziale è pari a zero.

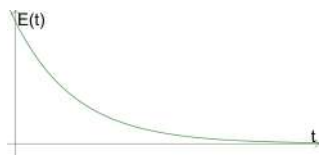
3.2.5 Energia meccanica

Supponiamo $\gamma \ll \omega_0$, ovvero $\omega \approx \omega_0$, cioè $m\omega^2 \approx m\omega_0^2 = \alpha$. Si ha

$$E = U + K = \frac{1}{2}\alpha \underbrace{A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega t + \varphi)}_{(x(t))^2} + \frac{1}{2}m \underbrace{A^2 \omega^2 e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega t + \varphi)}_{(\dot{x}(t))^2}$$

² da cui, raccogliendo

$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\alpha A^2}_{E_0} e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t}$$



Nota: abbiamo supposto regolare la dissipazione (vedi la nota), ma vedremo più avanti che si possono fare considerazioni più accurate, evitando questa approssimazione.

²L'espressione della velocità istantanea comprende due addendi, il secondo del quale è fattorizzato da γ , supposta molto minore di ω : per questo motivo questo addendo è stato trascurato.

Capitolo 4

Oscillatore armonico forzato e smorzato

Capitolo 5

Complementi

Parte II

Oscillatori a infiniti gradi di libertà

Capitolo 6

Introduzione: rilevanza storica

Capitolo 7

Introduzione al modello: la corda vibrante

7.1 Equazione di D'alembert

7.2 Soluzione generale dell'equazione di D'Alembert

Capitolo 8

Trasporto di energia

Capitolo 9

Passaggio da un mezzo di propagazione a un altro

Parte III

Acustica

Capitolo 10

Costruzione del modello

10.1 Equazione di D'alembert

Capitolo 11

Il modello tridimensionale

11.1 Fonometria

Parte IV
Cenni di analisi di Fourier

Capitolo 12

Applicazioni della trasformata di Fourier in ottica

12.1 Concetti preparatori

Vengono qui riportate alcune relazioni utili ricavabili dalla formula di Eulero $e^{ix} = \cos x + i \sin x$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\end{aligned}\tag{12.1}$$

Viene inoltre definita la funzione *apertura*, definita punto per punto per un generico ostacolo in questo modo:

$$\tau(y) = \begin{cases} 1 & \text{se aperto} \\ 0 & \text{se chiuso} \end{cases}\tag{12.2}$$

Considerando una perturbazione che incide l'ostacolo perpendicolarmente, è possibile considerare il contributo che ogni punto aperto dà alla perturbazione totale, ossia:

$$E = \frac{E_0}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) dy} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) \cos(\phi + ky \sin \theta) dy$$

in cui $\phi = kr - \omega t$, θ è l'angolo formato con la retta $y = 0$, $y \sin \theta$ è la differenza di cammino ottico, k è il numero d'onda. L'integrale al denominatore è un fattore di normalizzazione (è necessario dividere il contributo di ogni singolo punto per la lunghezza totale dell'apertura, altrimenti, anche solo dimensionalmente, il risultato non tornerebbe). Fondamentalmente si sta considerando

ogni punto aperto come una sorgente puntiforme e si stanno sommando le perturbazioni tenendo conto delle differenze di fase dovute alle differenze di cammino ottico.

Per semplificare i conti si può sostituire un esponenziale complesso al coseno; la parte reale, quella che interessa a noi, rimane la stessa.

$$E = \frac{E_0}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) dy} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) e^{-i(\phi + ky \sin \theta)} dy$$

Quindi, effettuando la sostituzione $u = \frac{\sin \theta}{\lambda}$ e portando la fase (che non dipende da y) fuori dall'integrale, si giunge alla seguente espressione, in cui u si può considerare come una frequenza spaziale:

$$E = \frac{E_0 e^{-i\phi}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) dy} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) e^{-i2\pi y u} dy \quad (12.3)$$

Il secondo integrale coincide con la definizione della *trasformata di Fourier* di $\tau(y)$, la quale si può esprimere in funzione della sola frequenza spaziale eliminando la dipendenza dallo spazio, ovvero:

$$\tau(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) e^{-i2\pi y u} dy \quad (12.4)$$

In questo modo è evidente che $E \propto \tau(u)$ e quindi che $I \propto \tau^2(u)$. Conoscendo $\tau(u)$ possiamo, quindi, conoscere come varia l'intensità in funzione della frequenza spaziale, ovvero in funzione dell'angolo θ e della lunghezza d'onda incidente.

12.2 Delta di Dirac

Un altro strumento utile è costituito dalla *delta di Dirac*, una distribuzione la cui utilità si coglie considerando il caso in cui la luce incidente non incontra nessun ostacolo, ovvero nel caso in cui

$$\tau(y) = 1$$

Nel campo lontano sappiamo che tutta la perturbazione si concentra in un singolo punto di dimensioni infinitesime. Allo stesso risultato giungeremo in maniera formale utilizzando la trasformata di Fourier, che, in questo caso, è semplicemente

$$\tau(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{-i2\pi y u} dy$$

L'integrale si può considerare come una somma di infinite funzioni armoniche di infinite frequenze diverse. In particolare la parte reale è costituita da coseni, mentre quella immaginaria da seni. Tutti i coseni in zero sono uguali a uno (che è un punto fisso), quindi la loro somma infinita diverge in 0, mentre in tutti gli altri punti la loro somma infinita tende a zero. Lo stesso ragionamento si può fare per i seni, ma in questo caso il punto fisso è l'origine (tutti i seni valgono zero in zero), quindi la loro somma infinita non diverge in zero.

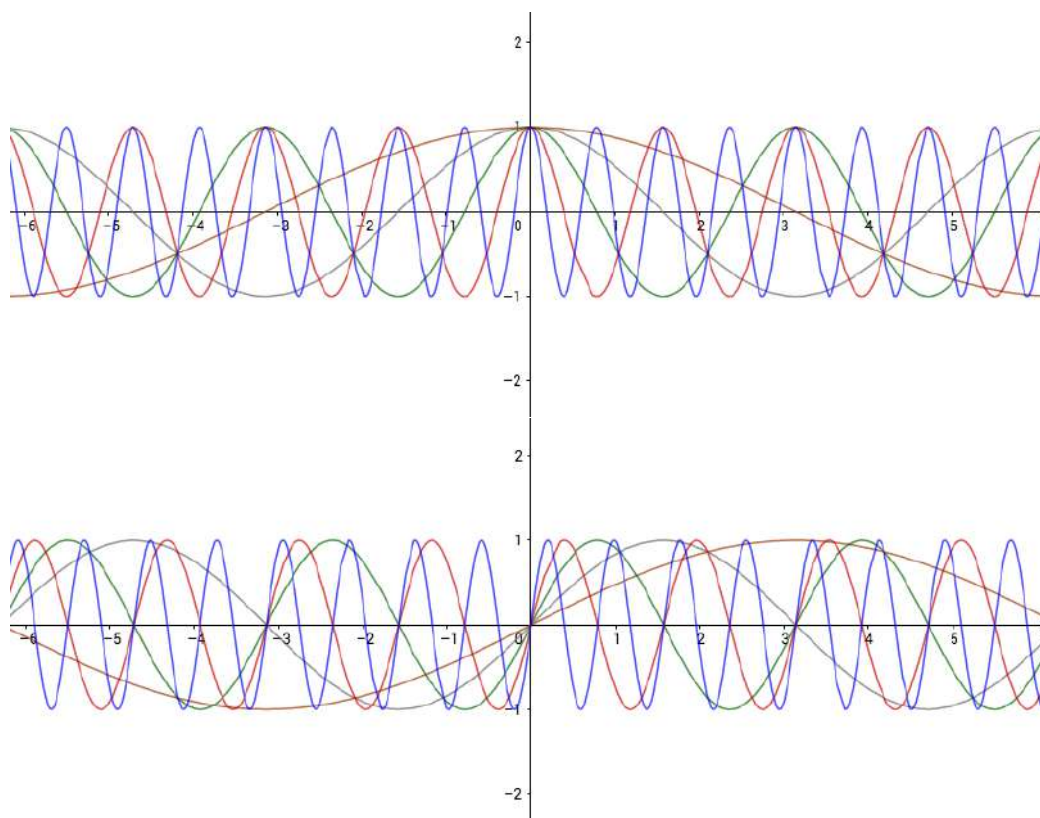


Figura 12.1 – Sopra sono rappresentate alcuni coseni di diverse frequenze, sotto sono rappresentati i corrispondenti seni. Si noti che tutti i coseni passano per il punto $(0, 1)$, mentre tutti i seni passano per il punto $(0, 0)$.

La delta di Dirac è proprio la distribuzione di cui abbiamo bisogno nel valutare l'integrale, essa è infatti così definita:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (12.5)$$

Tra le proprietà della delta di Dirac, utilizzeremo le seguenti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du = 1 \quad (12.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u - u_0) f(u) du = f(u_0) \quad (12.7)$$

Tornando all'esempio iniziale, possiamo quindi porre

$$\tau(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{-i2\pi y u} dy = \delta(u)$$

Il fattore di normalizzazione presente nella (3) è necessario affinché l'energia venga conservata: se non ci fosse la perturbazione sarebbe infinita in $u = 0$, ovvero quando $\theta = 0$. Il risultato finale, invece, è, come ci aspettavamo:

$$E = \begin{cases} E_0 \cos \phi & \theta = 0 \\ 0 & \theta \neq 0 \end{cases}$$

12.3 Una fenditura

A una fenditura di lunghezza a corrisponde la seguente funzione apertura (considerando l'origine nel punto centrale della fenditura), anche chiamata *rect* o *box function*:

$$\tau(y) = \begin{cases} 1 & -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi per calcolare la trasformata di Fourier è sufficiente integrare da $-\frac{a}{2}$ a $\frac{a}{2}$, essendo la funzione apertura nulla al di fuori di tale intervallo. Quindi

$$\begin{aligned} \tau(u) &= \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} 1 e^{-i2\pi y u} dy = -\frac{1}{i2\pi u} \left[e^{-i2\pi u y} \right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \\ &= \frac{e^{i2\pi u \frac{a}{2}} - e^{-i2\pi u \frac{a}{2}}}{2i} \frac{1}{\pi u} \frac{a}{a} = \frac{\sin(\pi u a)}{\pi u a} a = \text{sinc}(\pi u a) a \end{aligned}$$

Il passaggio dagli esponenziali al seno è stato fatto utilizzando la (1). Il fattore di normalizzazione è semplicemente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} 1 dy = a$$

Sostituendo i risultati trovati nella (3) e ricordando che ciò che ci interessa è solo la parte reale dell'equazione, si giunge a

$$E = \frac{E_0 e^{-i\phi}}{a} \text{sinc}(\pi u a) a = E_0 \cos(\phi) \text{sinc}(\pi u a)$$

$$E = E_0 \cos(\phi) \operatorname{sinc}(\alpha) \quad (12.8)$$

che è esattamente l'espressione trovata precedentemente senza utilizzare la trasformata di Fourier, dove $\alpha = \frac{ka}{2} \sin \theta$.

12.4 Interferenza tra due sorgenti puntiformi

Per una sorgente puntiforme possiamo considerare, al posto della funzione apertura descritta sopra, la delta di Dirac: il suo integrale è finito, quindi non sorgono problemi legati all'energia, ed è diversa da zero solo in un punto. Nel caso di una sola sorgente puntiforme, quindi

$$\tau(y) = \delta(y)$$

Analogamente, per studiare l'interferenza tra due sorgenti puntiformi a distanza d , consideriamo un sistema di riferimento la cui origine è posta nel punto medio tra le due sorgenti. La funzione $\tau(y)$ di prima diventa quindi:

$$\tau(y) = \delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(y + \frac{d}{2}\right)$$

Per la linearità dell'integrale, la trasformata di Fourier è

$$\tau(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(y - \frac{d}{2}\right) e^{-i2\pi uy} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(y + \frac{d}{2}\right) e^{-i2\pi uy} dy$$

Ricordando la (7) e la (1):

$$\tau(u) = \frac{e^{i2\pi uy} + e^{-i2\pi uy}}{2} 2 = 2 \cos(\pi ud)$$

$$\tau(u) = 2 \cos(\delta)$$

Attenzione: nell'ultima equazione $\delta = \frac{kd}{2} \sin \theta$, non è la delta di Dirac. Anche in questo caso il fattore di normalizzazione è facilmente calcolabile ricordando la (6) e la linearità dell'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(y - \frac{d}{2}\right) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(y + \frac{d}{2}\right) dy = 2$$

Sostituendo i risultati trovati nella (3) e ricordando che ciò che ci interessa è solo la parte reale dell'equazione, si giunge a

$$E = \frac{E_0 e^{-i\phi}}{2} 2 \cos(\delta)$$

$$E = E_0 \cos(\phi) \cos(\delta) \quad (12.9)$$

che è esattamente l'espressione trovata precedentemente senza utilizzare la trasformata di Fourier.

12.5 Reticolo di diffrazione

Consideriamo un reticolo costituito da N fenditure a distanza d una dall'altra. Ogni fenditura è approssimabile a una sorgente puntiforme. Analogamente a quanto descritto nel paragrafo precedente, possiamo considerare come $\tau(y)$ la seguente distribuzione, nota come *pettine di Dirac*. Cominciando dalla prima fenditura si avrebbe:

$$\tau(y) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(y - nd) = \begin{cases} \infty & \text{in corrispondenza di una apertura} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

È, tuttavia, più comodo contare le fenditure a partire dall'asse del reticolo, ovvero dal punto $y = 0$. Quindi, effettuando una traslazione:

$$\tau(y) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta\left(y - nd + \frac{N-1}{2}d\right) = \begin{cases} \infty & \text{in corrispondenza di una apertura} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La trasformata di Fourier si calcola come descritto sopra, ovvero:

$$\begin{aligned} \tau(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \delta\left(y - nd + \frac{N-1}{2}d\right) e^{-i2\pi uy} dy = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(y - nd + \frac{N-1}{2}d\right) e^{-i2\pi uy} dy \end{aligned}$$

Utilizzando la (7):

$$\tau(u) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi u(-nd + \frac{N-1}{2}d)} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi und} e^{i2\pi u \frac{N-1}{2}d} = e^{i2\pi u \frac{N-1}{2}d} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-i2\pi ud}\right)^n$$

Nell'ultimo passaggio un fattore è stato portato fuori dal simbolo di sommatoria in quanto non dipendente da n , inoltre è stato messo in risalto il carattere della sommatoria, che è una serie geometrica di ragione $e^{-i2\pi ud}$.

Ricordando che:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = (1 + q + \dots + q^{N-1}) \frac{1-q}{1-q} = \frac{1 + q + \dots + q^{N-1} - q - q^2 - \dots - q^N}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

Applicando questa formula al nostro caso e effettuando la sostituzione $2\pi u d = 2\delta$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-i2\delta} \right)^n = \frac{1 - e^{-i2\delta N}}{1 - e^{-i2\delta}} = \frac{e^{-i\delta N} e^{i\delta N} - e^{-i\delta N}}{e^{-i\delta} e^{i\delta} - e^{-i\delta}} \frac{2i}{2i} = e^{-i\delta(N-1)} \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)}$$

Riassumendo, la trasformata di Fourier, in questo caso, diventa:

$$\tau(u) = e^{i2\pi u \frac{N-1}{2} d} e^{-i\delta(N-1)} \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} = e^{i2\delta \frac{N-1}{2}} e^{-i\delta(N-1)} \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} = \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)}$$

Il fattore di normalizzazione si calcola considerando che bisogna integrare N volte (perché ci sono N fenditure) la delta di Dirac, quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} N\delta(y) dy = N$$

Inserendo i fattori trovati nella (3):

$$E = \frac{E_0 e^{-i\phi} \sin(N\delta)}{N \sin(\delta)} = \frac{E_0}{N} \cos(\phi) \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)}$$

Si può dimostrare che, per considerare anche gli effetti di diffrazione dovuti alla larghezza a delle fenditure, è sufficiente moltiplicare l'espressione trovata per $\text{sinc}(\alpha)$, dove $\alpha = \frac{ka}{2} \sin\theta$. Quindi otteniamo le due seguenti espressioni per la perturbazione e l'intensità (per la quale il termine $\cos(\phi)$ è stato incluso in I_0):

$$E = \frac{E_0}{N} \cos(\phi) \text{sinc}(\alpha) \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} \quad (12.10)$$

$$I = \frac{I_0}{N^2} \text{sinc}^2(\alpha) \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}$$

Tralasciando il termine legato alla diffrazione, che contribuirebbe come modulante, ci si può concentrare sulla parte caratteristica del reticolo. Considerando come variabile δ , il numeratore non è altro che una contrazione del denominatore, il loro rapporto, quindi, tende a diventare molto piccolo al di fuori degli intorno dei punti in cui il denominatore tende a 0; inoltre il fattore $\frac{1}{N^2}$ contribuisce ulteriormente ad annullare il valore dell'intensità. Diversa è, invece, la situazione quando $\delta \rightarrow 0$: sia il numeratore che il denominatore tendono a zero, quindi, considerando che $\sin x \approx x$ per $x \rightarrow 0$ si possono sviluppare i due seni ottenendo:

$$I \approx \frac{I_0}{N^2} \text{sinc}^2(\alpha) \frac{N^2 \delta^2}{\delta^2} = I_0 \text{sinc}^2(\alpha)$$

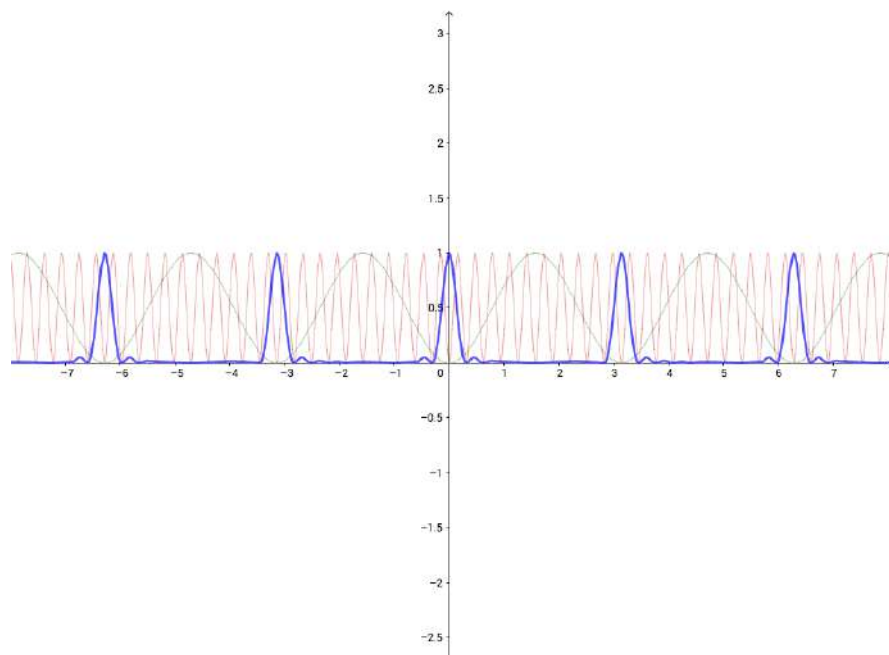


Figura 12.2 – In verde è disegnata la funzione $\sin^2(\delta)$, in rosso la funzione $\sin^2(N\delta)$, in blu la funzione $\frac{\sin^2(N\delta)}{N^2 \sin^2(\delta)}$, con $N = 10$

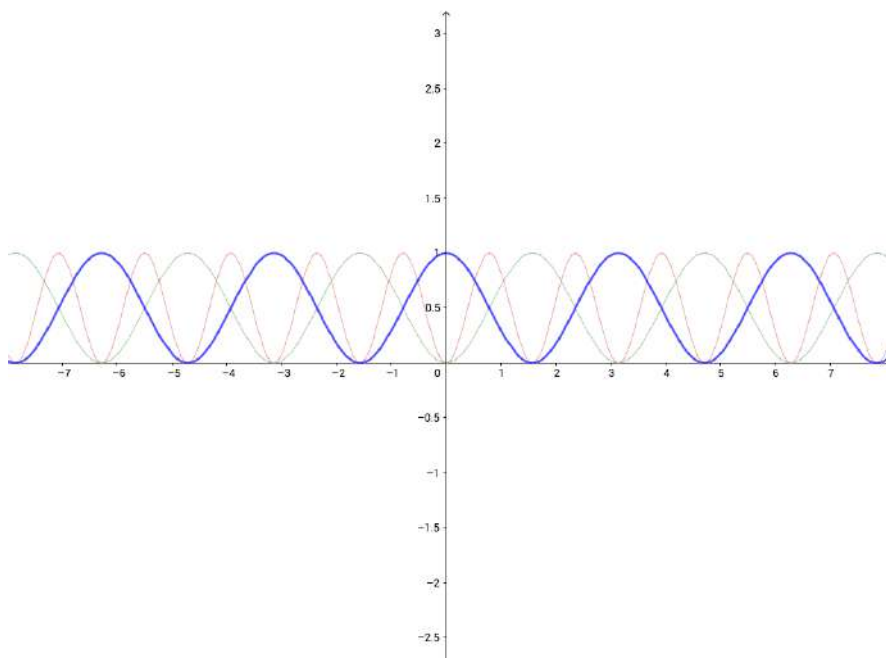


Figura 12.3 – Sono rappresentate le stesse funzioni descritte sopra, ma con $N = 2$. Si può verificare che la figura di interferenza in questo caso coincide con quella della interferenza tra due sorgenti puntiformi, come era ragionevole aspettarsi dal momento che un reticolo con due fenditure genera solo due sorgenti puntiformi che interagiscono tra loro.

Parte V

**Fenomeni specificatamente
ondulatori**

Parte VI

Ottica

Capitolo 13

Ottica fisica

Capitolo 14

Ottica geometrica

14.1 Diottri

14.2 Lenti sottili

14.3 Specchi

Capitolo 15

Arcobaleno

15.1 Dispersione cromatica

per ora balza

15.2 Fisica dell'arcobaleno

Ricordiamo di passaggio l'ordine dei colori, dal più "interno" al più "esterno", come compaiono nell'arcobaleno: RAGVAIV (*Rosso, Arancione, Giallo, Verde, Azzurro, Indaco, Violetto*, dove l'azzurro sostituisce il blu esclusivamente per questioni fonetiche; *ragvbiv* è difficile da pronunciare, ci riescono solo i croati...).

Cominciamo notando che è possibile osservare l'arcobaleno solamente all'alba (per i più fortunati) o al tramonto, quando cioè il sole si trova alle spalle dell'osservatore ed è circa possibile tracciare un asse immaginario che colleghi sole-osservatore-nuvola (o comunque acqua nebulizzata in altre forme). D'altro canto il sole non deve essere troppo basso sull'orizzonte, altrimenti la luce filtrata dall'atmosfera ha già perso buona parte dello spettro (è rossastra) e la dispersione cromatica fatica a verificarsi. Evidentemente il fenomeno che



vogliamo studiare sarà in qualche maniera dipendente dagli effetti combinati

di riflessione e rifrazione di un fascio di luce bianca all'interno della nuvola, quindi delle goccioline d'acqua sospese a mezz'aria.

Dobbiamo quindi cominciare chiedendoci come sia fatta una goccia d'acqua.

Una goccia d'acqua che sia sufficientemente piccola affinché gli impatti con le molecole d'aria circostanti la mantengano sospesa, non si deforma a causa della gravità, come se fosse appoggiata su una superficie (cosa che fa ad esempio la pioggia sulle finestre, o una lacrima sul viso): le forze interne di coesione tra le molecole le conferisce invece la conformazione di minima energia, quella sferica, in cui la superficie è minima.

Anche per una goccia leggermente più grande, che si muove verso il basso, le forze interne sono molto maggiori delle forze di attrito viscoso che tendono a schiacciarla.

Infine una goccia decisamente grossa, che precipita a gran velocità verso il basso, si romperà dando luogo a gocce sempre più piccoli, che rientrano nei casi precedenti.

15.2.1 Costruzione del modello

Abbiamo quindi sempre a che fare con un oggetto molto piccolo e approssimativamente sferico.

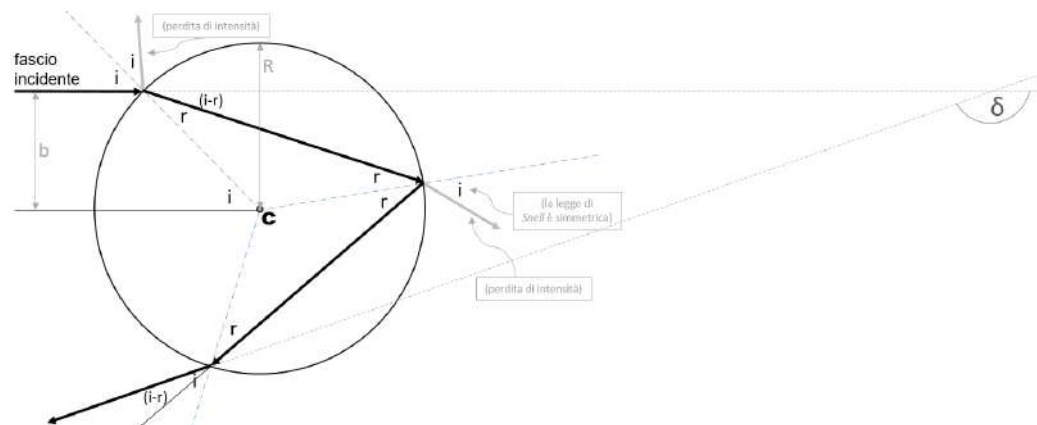


Figura 15.1 – Il bello del modello raffigurato è che esso rappresenta fedelmente la realtà (e non è una semplificazione bidimensionale), dal momento che i raggi giacciono veramente tutti sullo stesso piano. Posso dunque fidarmi delle similitudini triangolari.

Possiamo permetterci di rappresentare il *fascio incidente* come raggio perché i raggi del sole arrivano sulla goccia paralleli con buona approssimazione.

Inoltre notiamo che durante ogni rifrazione e riflessione parte dell'energia del raggio viene dispersa.

Osservando il modello che abbiamo disegnato vediamo che gli unici angoli che ci interessano per proseguire con i calcoli sono i ed r : infatti

$$\delta = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r) = \pi - 2i - 4r$$

Definiamo inoltre

$$\beta = \frac{b}{R}$$

a cui diamo il nome di *parametro d'impatto*, che è adimensionale: infatti se ci limitassimo all'uso di b , il modello non avrebbe validità generale, poiché dipenderebbe dalle dimensioni della goccia.

Per *Snell* abbiamo

$$\beta = \sin(i) = n \sin(r) \Rightarrow \begin{cases} i = \arcsin \beta \\ r = \arcsin \frac{\beta}{n} \end{cases}$$

con n indice di rifrazione.

Abbiamo così verificato che δ dipende da n , cosa che ci aspettavamo. Abbiamo già visto, però, che in generale $n = n(\lambda)$ è una funzione della lunghezza d'onda, motivo per cui si verifica la dispersione cromatica anche all'interno delle gocce. In particolare saranno i "raggi" di lunghezze d'onda inferiori (**blu**) ad essere deviati maggiormente durante la rifrazione e quelli di lunghezze d'onda maggiori (**rossi**) ad essere deviati di meno.

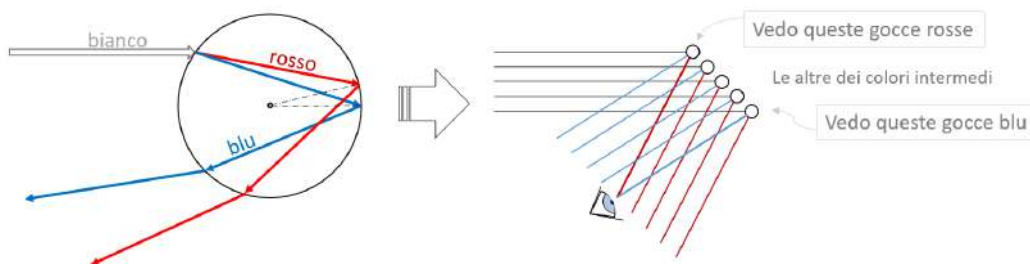
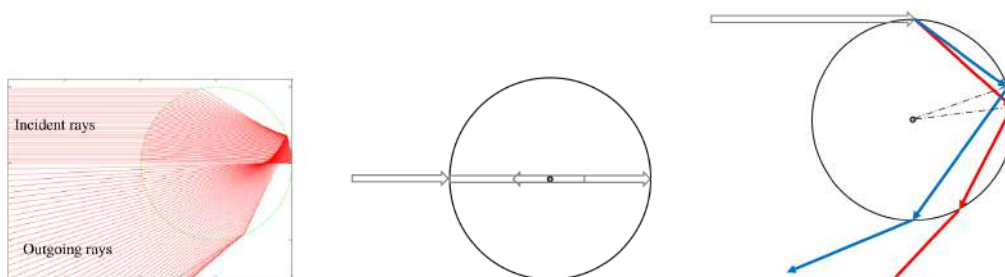


Figura 15.2 – I raggi tornano verso l'osservatore con deviazioni diverse: in questo modo si osservano più esternamente i colori intorno al rosso e più internamente quelli intorno al blu-violetto (con le altre sfumature tra essi comprese).

15.2.2 Esistenza e unicità di β_{min}

Fino a questo punto possiamo dire di aver gettato le basi per la spiegazione del fenomeno: in realtà il *cuore* della dimostrazione viene ora.

Infatti β assume tutti i valori compresi nell'intervallo $[0, 1]$ (a), in corrispondenza dei cui estremi si hanno i casi limite di incidenza perpendicolare alla superficie della goccia (b) e incidenza tangenziale¹ ad essa (c), con i rispettivi angoli di uscita δ .



(a) Tutte le configurazioni possibili (b) Incidenza perpendicolare (c) Incidenza tangenziale

Questo implica che ogni goccia produca l'effetto di sparpagliare tutte le componenti spettrali in ogni direzione compresa tra δ_{min} e δ_{max} , dal che non si spiegherebbe la possibilità di osservare l'arcobaleno.

Nota importante: non è evidente osservare che δ_{min} e δ_{max} *non sono* gli angoli corrispondenti ai due casi limite: per la precisione $\delta_{max} = 180^\circ$ lo è rispetto al caso (b), ma δ_{min} (di cui non sappiamo ancora il valore) non è l'angolo di uscita relativo al caso (c).

In questa osservazione sta il cuore della spiegazione: infatti siccome δ_{min} non corrisponde a un caso limite, esso sarà necessariamente compreso tra i due estremi 0 e 1 .

Si ha perciò $\delta = \delta(\beta)$ definita come $\delta : [0, 1] \rightarrow [\delta_{min}, \pi]$, la quale presenta un minimo. Nel minimo della funzione si ha $\frac{d\delta}{d\beta} = 0$, dunque in un suo intorno δ è circa costante, quindi i raggi incidenti intorno a β_{min} escono circa paralleli tra loro. Al contrario in corrispondenza di altri punti di impatto si ha $\frac{d\delta}{d\beta} \neq 0$, e il fascio di luce viene disperso con attenuazione geometrica notevolmente maggiore.

¹É un ossimoro per definizione, ma evidentemente abbiamo a che fare con un limite fisico, non matematico.

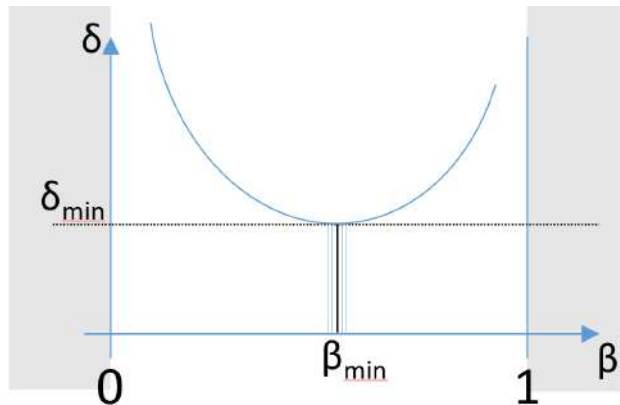


Figura 15.3 – In un intorno di β_{min} il fascio uscente subisce un'attenuazione geometrica minima, siccome i raggi tendono ad essere pressoché paralleli.

Il risultato di tutto ciò è che i raggi uscenti con angolo δ_{min} arrivano particolarmente luminosi all'occhio dell'osservatore, permettendogli di vedere l'arcobaleno ad *una e una sola* angolazione rispetto all'asse sole-osservatore.

Esistenza e unicità del parametro d'impatto minimo

β_{min} esiste ed è unico. L'angolo di deflessione corrispondente vale $\delta_{min} \simeq 138^\circ$.

Dimostrazione.

$$\frac{d\delta}{d\beta} = 0 = \frac{d}{d\beta} [\pi - 2i - 4r] = \frac{d}{d\beta} \left[\pi + 2 \arcsin(\beta) - 4 \arcsin\left(\frac{\beta}{n}\right) \right]$$

ma $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, quindi

$$\frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{4}{n\sqrt{1-\frac{\beta^2}{n^2}}} = 0$$

$$n^2 - \beta^2 = 4 - 4\beta^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \simeq 0,86 \quad \text{per l'acqua}$$

Calcoliamo l'angolo minimo di deflessione

$$\delta_{min} = \delta(\beta_{min}) = \left[\pi + 2 \arcsin(0,86) - 4 \arcsin\left(\frac{0,86}{n_{acqua}}\right) \right] \simeq 138^\circ$$

Va tuttavia notato che β_{min} dipende anche da $n = n(\lambda)$, cioè ogni raggio con diversa lunghezza d'onda ha un angolo di uscita con attenuazione geometrica minima diverso. D'altro canto queste differenze sono minime e si attestano

intorno a un valore $\Delta\delta_{min} \simeq 2^\circ$ che è proprio l'angolo con cui vediamo separati i colori dell'arcobaleno, centrato in δ_{min} .

Ovvero la zona colorata di cielo va da circa 136° a circa 140° .

□

15.2.3 Struttura arcobaleno

Dunque a che altezza vedo l'arcobaleno? é semplice: $180^\circ - \delta_{min} \simeq 42^\circ$.

Sì, ma io lo vedo andare da terra ad un punto di massima altezza e poi ancora all'orizzonte...

Infatti tutti i nostri calcoli sono stati effettuati su un piano, ma senza perdita di generalità, a causa della simmetria di rotazione (intorno all'asse sole-osservatore) che il problema ha: effettuando questa rotazione per portare la soluzione nello spazio tridimensionale otteniamo un *conobaleno* con vertice nell'osservatore e asse coincidente con l'asse sole-osservatore. Ciò che si vede è di fatto il *perimetro di base* di questo cono $\pm\Delta\delta_{min}$, sul quale "giace" l'arcobaleno... e il motivo per cui non vediamo tutto il perimetro di base in un bellissimo *cerchiobaleno* è che una parte di esso finisce sotto l'orizzonte (in realtà non esiste proprio): da un aeroplano è possibile osservare il *cerchiobaleno* in condizioni molto particolari, con l'ombra del velivolo al centro del cerchio.

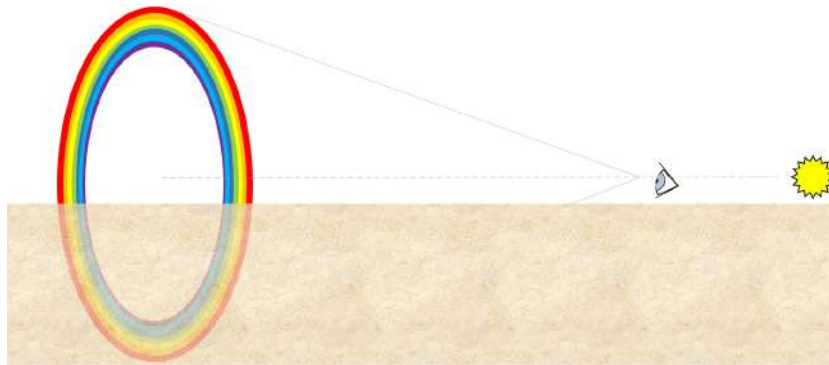


Figura 15.4 – L'arcobaleno è *soggettivo*: ognuno degli osservatori lo vede diverso, perché dipende dalla sua posizione.

15.2.4 Arcobaleno secondario e Fascia di Alessandro

Fino a questo punto abbiamo considerato valori di β compresi tra 0 e 1; in realtà $\beta \in [-1, 1]$. Cosa succede ai raggi che incontrano la superficie della

goccia al di sotto dell'asse passante per il centro?

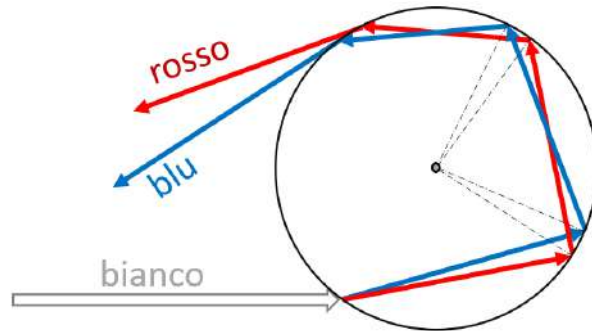


Figura 15.5 – Il fascio di luce incidente con $-1 < \beta < 0$ subisce in ordine una rifrazione in ingresso, due riflessioni e una rifrazione in uscita, che ne abbattano l'intensità.

Siccome il fascio in questo caso subisce due riflessioni e due rifrazioni si ha

$$\delta_{sec} = \delta + (\pi - 2r) = 2\pi + 2i - 6r$$

Notiamo che essendo β negativo, già dalla prima rifrazione il fascio disperso presenta i colori ribaltati rispetto al caso precedente.

Osservando l'andamento della derivata di δ_{sec} in funzione di β si nota che in questo caso la funzione presenta un massimo anziché un minimo e che tale massimo è inferiore al minimo di $\delta(\beta)$. Dal momento che tutte le possibili

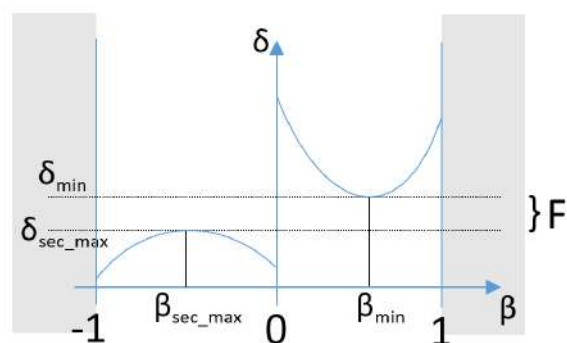


Figura 15.6 – I raggi riflessi non accedono alla zona **F** compresa tra δ_{min} e δ_{sec_min} .

angolature di uscita dei raggi che incontrano la goccia appartengono al co-dominio della funzione $\delta(\beta)$, la zona **F** risulta più scura.

Pertanto l'immagine che si osserva (nei casi più fortunati, quando l'aria è tersa e le condizioni di luce e di nebulizzazione dell'acqua sono ottime) comprende due archi colorati concentrici, di cui il più piccolo meno intenso, con i colori disposti specularmente, separati da una zona di cielo leggermente più scura che altrove, detta *Fascia (o Banda) di Alessandro*, in onore di Alessandro di Afrodisia (II-III sec. d.C.) che fu tra i primi a osservare e descrivere questo fenomeno.

Capitolo 16

Polarizzazione della luce