

Onde e Oscillazioni, Alberto Vailati

Scopo del corso è di fornire allo studente un'introduzione alla fisica dei processi oscillatori e ondulatori. Trattandosi di un corso introduttivo, quando possibile vengono svolte brevi dimostrazioni sperimentali in aula per aiutare gli studenti nella visualizzazione del fenomeno investigato. L'introduzione fenomenologica verrà affiancata dalla formulazione di semplici modelli descrittivi, per arrivare a mostrare l'unitarietà nella descrizione di processi oscillatori ed ondulatori di natura diversa

Programma

1 – Oscillazioni

- ✓ - Oscillatore armonico
- ✓ - Oscillatore armonico smorzato.
- ✓ - Oscillatore forzato-smorzato

2- Onde meccaniche: Corda vibrante

- ✓ - Corda non vincolata
- ✓ - Interferenza ed onde stazionarie
- ✓ - Corda vibrante vincolata agli estremi
- ✓ - Onda armonica
- ✓ - Potenza di un'onda
- ✓ - Coefficienti di trasmissione e riflessione
- Proprietà della funzione d'onda

3- Onde meccaniche: acustica

- ✓ - Elementi di termodinamica
- ✓ - Onde acustiche in un gas perfetto
- ✓ - Velocità del suono
- ✓ - Onde acustiche stazionarie
- ✓ - Potenza di un'onda acustica
- Onde piane e sferiche
- Fonetria e livello sonoro
- Attenuazione e assorbimento
- Percezione dei suoni, scala armonica e strumenti musicali
- Effetto Doppler
- Interferenza e battimenti

4 – Ottica geometrica e Ottica Fisica

- ✓ - Spettro delle onde elettromagnetiche; velocità della luce; dualità onda-corpuscolo
- ✓ - Spettro del corpo nero
- ✓ - Riflessione e rifrazione
- ✓ - Principio di Huygens-Fresnel e principio di Fermat

- ✓ - Riflessione totale interna e guide di luce
- ✓ - Coefficienti di riflessione e di trasmissione
- ✓ - Dispersione cromatica; prisma e arcobaleno
- ✓ - Approssimazione parassiale; formazione di immagine;
- ✓ - Specchi piani e curvi; Diottri; Lenti sottili; equazione del costruttore di lenti
- ✓ - Sistemi di lenti e specchi e strumenti ottici
- ✓ - Diffrazione di Fraunhofer da un'apertura;
- ✓ - Potere risolutivo; criterio di Rayleigh
- ✓ - Interferenza da una doppia fenditura; interferenza da una lamina sottile, interferometro di Michelson
- ✓ - Reticolo di diffrazione
- ✓ - Polarizzazione della luce

Propedeuticità consigliate

Meccanica, Analisi 1

Prerequisiti

- calcolo integrale e differenziale
- trigonometria piana
- elementi di meccanica

Testi di approfondimento

AA. VV. Onde e Oscillazioni, appunti del corso del professor Vailati, CUSL 2011
 Halliday-Resnick-Krane, Fisica vol 1 e 2, CEA
 Mazzoldi-Nigro-Voci, Fisica 2, Edises
 Mencuccini-Silvestrini, Fisica 2, Liguori
 Crawford, La fisica di Berkeley: Onde, Zanichelli
 Bettini, Le onde e la luce, Zanichelli
 Lyngst and Livingstone, Color and Light in Nature, Cambridge University Press

Prove d'esame

L'esame comprende una prova scritta seguita da una prova orale. Per accedere alla prova orale è indispensabile aver riportato la sufficienza nella prova scritta. La prova scritta include quattro esercizi di difficoltà analoga a quella dei problemi proposti nel corso delle esercitazioni, da svolgere in due ore. La prova scritta ha la validità di un anno solare. Sul sito del corso online è presente una raccolta di temi d'esame.

Prove in itinere: gli studenti che frequentano il corso hanno la possibilità di sostituire la prova scritta con due prove in itinere, che hanno luogo a metà corso e al termine del corso. Per accedere all'orale è necessario aver conseguito la sufficienza in entrambi le prove in itinere. Le prove consistono in alcuni esercizi

ONDE E OSCILLAZIONI

OSCILLAZIONI e OSCILLATORI

Esistono dei modelli chiamati **oscillatori armonici**.

Iniziamo a studiare il + semplice, il **SISTEMA MASSA-MOLLA**



Massa che scivola su un piano
senza attrito collegata a una
molla vincolata all'altra estremità
Massa supposta senza elasticità
Molla supposta senza massa
(Ho già fatto 3 approssimazioni)

Troviamo l'**equazione** dell'oscillatore semplice, che descriva
il **moto della massa**

Legge di Hooke: $F = -kx$

II legge dinamica: $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$

Uguagliamo: $m\ddot{x} = -kx$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega_0^2 x$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ Equazione di moto per
l'oscillatore semplice

È un'equazione differenziale di **II ordine**, **lineare**, **omogenea**

⇒ se x_1 e x_2 sono soluzioni, anche le loro combinazioni lineari sono soluzioni, per il **principio di sovrapposizione**

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \approx$$

Proviamo a **risolvere** l'equazione differenziale per trovare la **legge oraria del moto** della massa, che descrive la sua posizione x in ogni istante t .

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

Possono andare bene: $\sin(\omega_0 t)$
 $\cos(\omega_0 t)$

che derivate due volte danno se stesse cambiate di segno, e

$Ae^{\lambda t}$ che derivata due volte dà se stessa

In quest'ultimo caso, vediamo quanto deve valere λ :

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega_0^2 e^{\lambda t} A \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -\omega_0^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0$$

⇒ Abbiamo **4 soluzioni**, 2 reali e 2 complesse:

$$x = \sin(\omega_0 t)$$

$$x = \cos(\omega_0 t)$$

$$x = e^{i\omega_0 t}$$

$$x = e^{-i\omega_0 t}$$

Posso passare da una all'altra in questo modo:

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)$$

Combiniamo linearmente le due equazioni reali per ottenere la **SOLUZIONE GENERALE** dell'equazione differenziale

$$x(t) = A \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(\omega_0 t) + B \overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\omega_0 t)$$

Per trovare A e B, devo sapere due condizioni iniziali: per la posizione **la** **posizione** e la **velocità** iniziale della massa

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

$$x(0) = A \overset{0}{\sin}(0) + B \cos(0) = B = x_0$$

$$\dot{x}(0) = A\omega_0 \cos(0) - B\omega_0 \sin(0) = A\omega_0 = v_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} B &= x_0 \\ A &= \frac{v_0}{\omega_0} \end{aligned}}$$

⇒ la soluzione è:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

È molto scomodo utilizzare una formula con la somma di due notazioni armoniche.

So che la somma di 2 notazioni armoniche con la stessa periodicità è una singola funzione armonica ⇒ voglio riscrivere la mia equazione nella forma

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

C = ampiezza

φ = costante di fase

Come faccio a ricavarla? So che $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$$\Rightarrow x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) = C [\cos(\omega_0 t) \cos\varphi - \sin(\omega_0 t) \sin\varphi] =$$

$$= \underbrace{C \cos\varphi}_{= x_0} \cos(\omega_0 t) - \underbrace{C \sin\varphi}_{= \frac{v_0}{\omega_0}} \sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} C \cos\varphi = x_0 \\ -C \sin\varphi = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$

ELEVO AL QUADRATO E SOMMO MEMBRO A MEMBRO

$$C^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$$

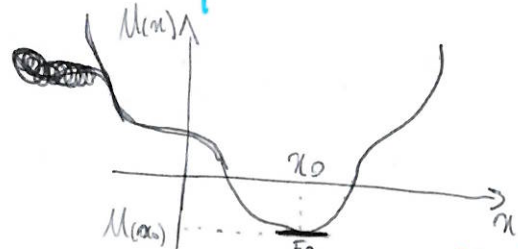
$$\Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

PUNTI DI EQUILIBRIO STABILE

Un punto di equilibrio stabile è un punto di minimo di energia potenziale

$$dW = F dx = - dM$$

$$\Rightarrow F = - \frac{dM}{dx} = 0 \quad \text{EQUILIBRIO IN UNA DIMENSIONE}$$



$$F = - \nabla M = 0 \quad \text{EQUILIBRIO IN PIU' DIMENSIONI}$$

Nel sistema massa - molla siamo in 1 dimensione

$$F = - \frac{dM}{dx} = -k(x - x_0) = 0 \Rightarrow \boxed{x = x_0} \quad \text{PUNTO DI EQUILIBRIO}$$

SITUAZIONE UNIDIMENSIONALE

Sviluppiamo $M(x)$ con Taylor nel punto di equilibrio $x_0 = 0$

$$M(x) = M(0) + \frac{dM}{dx}(0) \cdot x + \frac{1}{2} \frac{d^2M}{dx^2}(0) x^2$$

Sappiamo che $\sqrt{M(0)}$ è un punto di minimo dell'energia potenziale

$$\Rightarrow \frac{dM}{dx}(0) = 0 \quad M(0) \text{ costante arbitraria}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}(0) = k > 0$$

$$\text{poiché } F = - \frac{dM}{dx} \Rightarrow \frac{dF}{dx} = - \frac{d^2M}{dx^2} = -k \Rightarrow \boxed{F} = \int_0^x (-k) dx = \boxed{-kx}$$

(CASO UNIDIMENSIONALE)

DIVIDO MEMBRO A MEMBRO: $\tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega_0 x_0}$

$$\Rightarrow \tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

(RICORDARSI CHE $\tan \varphi$ È PERIODICA CON PERIODO 2π ! AVRO' DUE SOLUZIONI POSSIBILI)

$$\Rightarrow x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cos\left(\omega_0 t + \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)\right)$$

ENERGIA

$$K = E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m C^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \text{ENERGIA CINETICA}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k C^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad \text{ENERGIA POTENZIALE}$$

$$E = U + K = \frac{1}{2} m C^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k C^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k C^2 \left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) \right] = \frac{1}{2} k C^2 \quad \text{ENERGIA MECCANICA}$$

L'energia meccanica non dipende dal tempo

\Rightarrow il sistema è CONSERVATIVO (infatti dipende solo dalla forza elastica, che è conservativa)

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

In un sistema conservativo il moto oscillatorio è **reversibile**:

$$x(t) = x(-t)$$

Il **tempo** non ha una direzione preferenziale di scorrimento

Questo comportamento fisicamente non è possibile

⇒ introduciamo **TERMINI DISSIPATIVI** (di attrito viscoso o emissione di radiaz.)

$$F_{\text{attr. visc}} = -2\gamma m \dot{x}$$

γ = COSTANTE DI SMORZAMENTO
Dimensioni dell'inverso di un tempo (s^{-1})

$$\Rightarrow F_{\text{TOT}} = -kx - 2\gamma m \dot{x} = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

EQUAZIONE DI MOTO ~~ARMONICO~~ OSCILLATORIO SMORZATO

Equazione di **II ordine**, **lineare**, **omogenea** (vale il princ. di sovrapposizione)

FUNZIONE DI PROVA: $x(t) = A e^{\lambda t}$

Che sostituita nell'equaz. diventa: $\lambda^2 A e^{\lambda t} + 2\gamma \lambda A e^{\lambda t} + \omega_0^2 A e^{\lambda t} = 0$

$A e^{\lambda t} \neq 0 \Rightarrow$ divido per $e^{\lambda t} \Rightarrow$ $\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$
HO UN'EQUAZIONE ALGEBRICA!

Soluzioni equaz. algebrica: $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

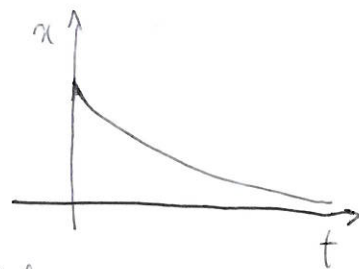
I CASO

$$\Delta = 0 \implies \gamma = \omega_0$$

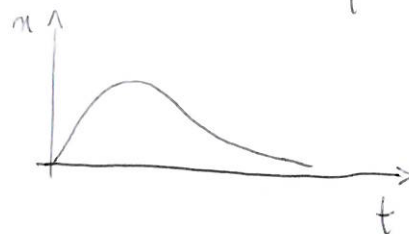
$$\lambda = -\gamma \implies$$

(DUE RADICI COINCIDENTI)

$$x(t) = A e^{-\gamma t}$$



CASO PARTICOLARE: $x(t) = A t e^{-\gamma t}$
(SMORZAMENTO CRITICO)



II CASO

$$\Delta > 0 \implies \gamma > \omega_0$$

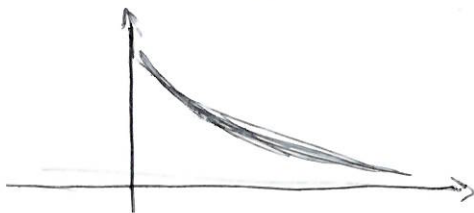
DUE RADICI REALI

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

Termine sotto radice minore di $\gamma \implies \lambda_1, \lambda_2 < 0$

$$x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

Composita lineare di
due esponenziali decrescenti
(MOTO SORRASMOZZATO)



• III CASO

$\Delta < 0 \Rightarrow \gamma < \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega_1$$

DOE RADICI IMMAGINARIE

$$\lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega_1$$

$$\lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega_1$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \omega_1 < \omega_0$$

$$x(t) = a e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + b e^{-\gamma t - i\omega_1 t} = e^{-\gamma t} [a e^{i\omega_1 t} + b e^{-i\omega_1 t}]$$

Chiamo

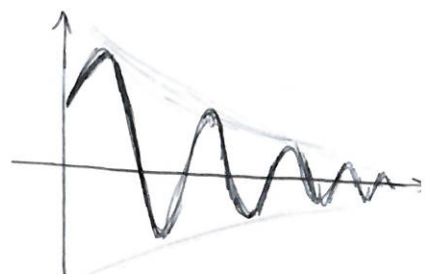
$$a = \frac{A}{2} e^{i\varphi} \quad b = \frac{A}{2} e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \left[\frac{A}{2} e^{i\varphi} e^{i\omega_1 t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} e^{-i\omega_1 t} \right]$$

$$= e^{-\gamma t} \cdot A \left[\frac{e^{i(\varphi + \omega_1 t)} + e^{-i(\varphi + \omega_1 t)}}{2} \right]$$

$$= e^{-\gamma t} \cdot A \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

SOLUZIONE
OSCILLATORE
SMORZATO



con

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$A^2 = 4ab$$

$$\cos \varphi = \frac{a+b}{4ab}$$

infatti $4ab = \frac{A^2}{4}$

infatti $a+b = \frac{A}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = A \cos \varphi = 4ab \cos \varphi$

Studiamo come l'equazione dell'oscillatore smorzato dipende dalle **condizioni iniziali**

$$x(0) = \boxed{x_0} = \boxed{A \cos \varphi}$$

$$\dot{x}(0) = \boxed{v_0} = -A\omega_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi) - A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$= -A\omega_1 \sin \varphi - A\gamma \cos \varphi = \boxed{-A\omega_1 \sin \varphi - \gamma x_0}$$

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi \\ \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1} = -A \sin \varphi \end{cases}$$

SOMMO AL QUADRATO : $A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1} \right)^2$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_1^2} + \frac{2v_0\gamma x_0}{\omega_1^2} + \frac{\gamma^2 x_0^2}{\omega_1^2}}$$

FACCIO IL RAPPORTO : $-\tan \varphi = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1 x_0}$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega_1 x_0} - \frac{\gamma}{\omega_1}$$

→ TERMINI DI CORREZIONE.
Se $\gamma \ll \omega_0$ sono trascurabili (smorzamento debole)

ENERGIA IN OSCILLAZIONI SMORZATE

$$\boxed{U} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k e^{-2\gamma t} A^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\boxed{K} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 e^{-2\gamma t} \left[\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) + \gamma \cos(\omega_1 t + \varphi) \right]^2$$

$$E = U + K = \frac{1}{2} k e^{-2\gamma t} A^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi) + \frac{1}{2} m e^{-2\gamma t} A^2 \left[\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) + \gamma \cos(\omega_1 t + \varphi) \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} A^2 e^{-2\gamma t} \left[k \cos^2(\omega_1 t + \varphi) + m \left(\gamma \cos(\omega_1 t + \varphi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) \right)^2 \right]$$

MOTO DEBOLMENTE SMORZATO $\Rightarrow \gamma \cos(\omega_1 t + \varphi)$ TRASCURABILE

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} k e^{-2\gamma t} A^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi) + \frac{1}{2} m e^{-2\gamma t} A^2 \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi)$$

$$m \cdot \omega_1^2 \approx m \cdot \omega_0^2 = m \cdot \frac{k}{m} = k$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t}}$$

energia in oscillatore libero
= energia iniziale

L'energia totale decresce esponenzialmente

In più, se mettiamo in Newton la nostra eq. differenziale (eq di forze)

$$m\ddot{x} + 2\gamma m\dot{x} + \omega_0^2 m x = 0 \quad \text{e' una forza.}$$

$$\text{Sappiamo che } \mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{F dx}{dt} = Fv = F\dot{x}$$

\Rightarrow moltiplichiamo l'equaz diff. per \dot{x}

$$m\ddot{x}\dot{x} + 2\gamma m\dot{x}^2 + \omega_0^2 m x\dot{x} = 0$$

$$m\ddot{x}\dot{x} + \omega_0^2 m x\dot{x} = -2\gamma m\dot{x}^2$$

$$\text{So che } \frac{d}{dt} (f(x))^2 = 2f(x)f'(x) \Rightarrow x \cdot \ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{x}^2$$

$$x \cdot \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 m \frac{d}{dt} x^2 = -2\gamma m \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_K + \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2}_U \right] = -2\gamma m \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt} E(t) = -2\gamma m \dot{x}^2 = -4\gamma \left(\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_K \right)$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -4\gamma K}$$

L'energia persa è proporzionale all'energia cinetica.
La perdita di energia non è uniforme: è MASSIMA intorno al punto di equilibrio, e NULLA agli estremi di oscillazione
(quando $\dot{x}=0$)

OSCILLATORE FORZATO

L'oscillatore è soggetto ~~ad~~ a una forza esterna, la FORZANTE

$$\Rightarrow \text{l'equazione diventa } \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Noi ci occuperemo di **forzanti armoniche**: forze nella forma

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (\text{in generale, } \omega \neq \omega_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)}$$
 EQUAZIONE DI MOTO OSCILLATORE FORZATO

È un'equazione di II ordine, lineare, NON OMOGENEA (ho un termine che non dipende da x o sue derivate) \Rightarrow non vale il principio di sovrapposizione

Vale però un'altra proprietà importante:

Se x_1 e x_2 sono soluzioni dell'equaz. differenziale, ~~non~~

$$x_0(t) = x_1(t) - x_2(t) \text{ risolve l'equaz. omogenea}$$

Infatti: $(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 2\gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_0^2(x_1 - x_2) = 0$

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad \text{QUESTA È OMOGENEA}$$

\Rightarrow se chiamo $x_p(t)$ una soluzione particolare della non omogenea (nota) e $x(t)$ un'altra soluzione (non nota)

$$\boxed{x(t) = x_0(t) + x_p(t)}$$

\Rightarrow CI BASTA TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE (la soluzione dell'omogenea la sappiamo, è la solita)

Sappiamo che, dopo tempi molto lunghi ($t \gg \frac{1}{\gamma}$),
~~ci rimane solo~~ ci rimane solo ~~l'~~ l'oscillazione armonica legata
 alla forzante, mentre l'apporto dato dall'ampiezza si è annullato

$$\Rightarrow \boxed{x_p(t) = B \cos(\omega t + \varphi_1)} \quad \text{per } t \gg \frac{1}{\gamma}$$

↑
pulsaz
forzante

$$\Rightarrow \boxed{x(t)} = x_0(t) + x_p(t) = \boxed{A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi) + B \cos(\omega t + \varphi_2)}$$

È sempre sbatti però usare combinazioni di seni e coseni

⇒ trasformiamola in SOLUZIONE ESPONENZIALE COMPLESSA

$$\boxed{x_p(t) = B e^{i(\omega t + \varphi)}}$$

Sostituiamola nell'equaz differenziale:

$$\boxed{-B\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)} + 2\gamma B i \omega e^{i(\omega t + \varphi)} + \omega_0^2 B e^{i(\omega t + \varphi)} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}}$$

Divido per $e^{i(\omega t + \varphi)}$

$$= \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\boxed{B (-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} e^{-i\varphi}}$$

Ho un'equazione complessa con 2 incognite: B e φ .
 Le posso ricavare in funzione dei parametri.

Infatti, nei numeri complessi, $a+ib=c+id \iff a=c \wedge b=d \iff a^2+b^2=c^2+d^2$

Sappiamo anche che $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

\implies la nostra equaz diventa

$$B \left(\underbrace{(\omega_0^2 - \omega^2)}_{\text{Re}} + i \underbrace{2\gamma\omega}_{\text{Im}} \right) = \underbrace{\frac{F_0}{m} \cos\varphi}_{\text{Re}} + i \underbrace{\frac{F_0}{m} \sin\varphi}_{\text{Im}}$$

• EGUAGLIAMO I MODULI QUADRI: $B^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2] = \frac{F_0^2}{m^2}$

$$\implies B = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

• EGUAGLIAMO PARTI REALI $\left\{ \begin{array}{l} B^2(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m} \cos\varphi \\ B 2\gamma\omega = -\frac{F_0}{m} \sin\varphi \end{array} \right.$

• PARTI COMPLESSE

Dividiamo:

$$\tan\varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

\implies La soluzione particolare (dopo un tempo lungo) e^i :

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{i \left(\omega t - \arctan \left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right)}$$

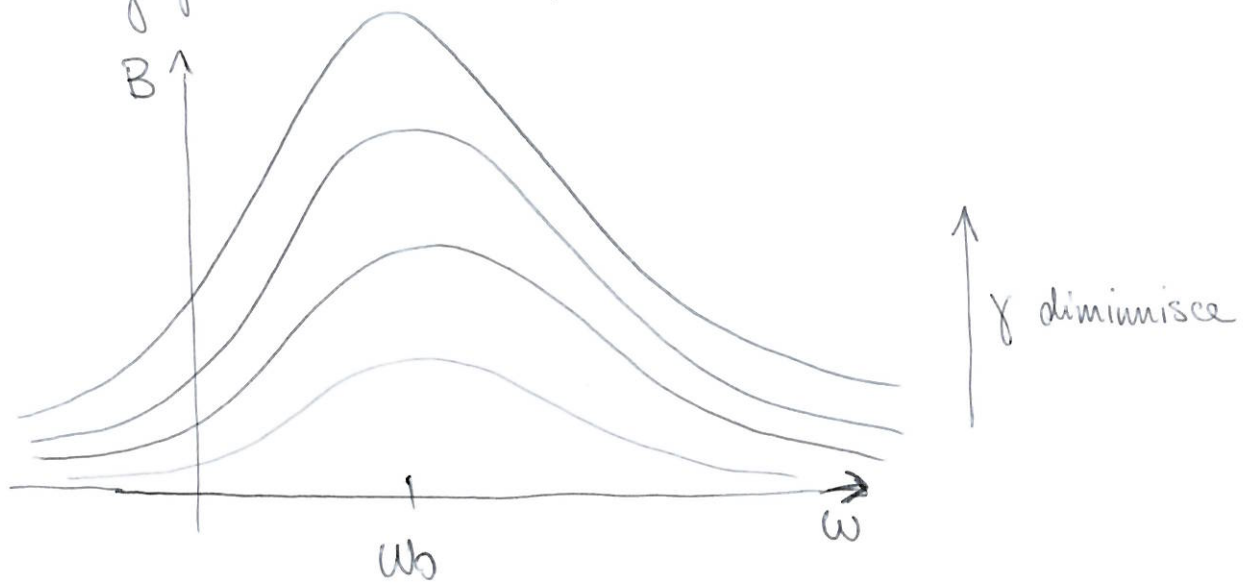
L'ampiezza e la fase sono **COSTANTI** e dipendono solo da ω , ω_0 e γ . Quindi, per grandi tempi

l'oscillazione **NON** **DIPENDE** **DA** **CONDIZIONI** **INIZIALI**, che si cancellano dalla memoria

RISONANZA

Sappiamo che l'ampiezza del moto **B** dipende dalla pulsazione della forzante ω

Vediamo un grafico di B in funz di ω (LORENTZIANA)



Risonanza = condizione di massima ampiezza.

Avviene quando $\omega = \omega_0 \implies \varphi = \frac{\pi}{2}$ (quadratura di fase delle oscillaz)

Infatti in questo caso la forza massima viene applicata nel punto di equilibrio (in cui il sistema perde maggiormente energia) e agli estremi di oscillazione (dove non perde energia) la forzante è nulla

In più, notiamo ~~che~~ ~~per~~ ~~per~~ che, in condizioni di risonanza, se $\gamma \rightarrow 0$ l'ampiezza diverge \implies anche con una forza non molto grande è possibile portare la massa oltre il suo regime armonico e distruocere l'oscillatore

ENERGIA IN OSCILLAZIONI FORZATE

Dopo tempi lunghi,

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k B^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 B^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E = U + K = \frac{1}{2} \underbrace{(k)}_{=m\omega^2} B^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} m \omega^2 B^2 \sin^2(\omega t + \varphi) =$$
$$= \frac{1}{2} m B^2 \left[\omega_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 (1 - \cos^2(\omega t + \varphi)) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m B^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \right]$$

\Rightarrow l'energia dipende armonicamente dal tempo

CONDIZIONI DI RISONANZA:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m B^2 \omega^2$$

\Rightarrow In **condizioni di risonanza**, l'energia totale è **COSTANTE**.

Infatti, la perdita di energia dovuta allo smorzamento è esattamente compensata dal lavoro della forzante



CORDA VIBRANTE

• È un **MODELLO** di una corda lunga L , con massa m , fissata agli estremi.

• Introduco la **DENSITA' LINEARE** $\rho = \frac{m}{L}$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$

• Per far stare la corda orizzontale, la sottopongo a una **TENSIONE** T_0 .

Ogni punto z della corda è tirato dal suo punto di fissaggio z_1 con una tensione T_0 . Ma per il principio di azione-reazione anche z_1 è tirato da z con tensione $-T_0$.

⇒ La risultante su ogni punto (tranne i due estremi) è 0
tensione

• Poiché il nostro è un **modello**, introduco alcune **approssimazioni** chi:

- ◊ La corda si può considerare unidimensionale
- ◊ La corda è perfettamente elastica, la tensione è la stessa in ogni punto della corda
- ◊ La corda è perfettamente flessibile (se la curvo forzatamente non perde energia)
- ◊ La gravità è trascurabile ($m g \ll T_0$), altrimenti la corda non sarebbe mai perfettamente orizzontale ma sarebbe a catenaria
- ◊ Le perturbazioni sono polarizzate (arrivano solo su un piano)
⇒ diventano scalari

Le perturbazioni sono piccole

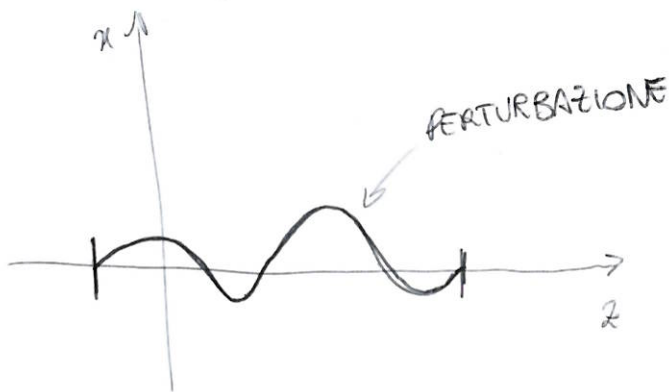
- L'asse orizzontale (su cui giace la corda) lo chiamo z .
- Corda piatta orizzontale: CONDIZIONE DI EQUILIBRIO



- Perturbo la corda, spostandola dalla sua condiz di equilibrio.
Posso creare ~~o~~ un' equazione che mi dice come **ogni punto** **si sposta nel tempo**.

Chiamo questa equazione $\psi(z, t)$.

E' una funzione a **due variabili reali**, il punto della corda z e l'istante di tempo t



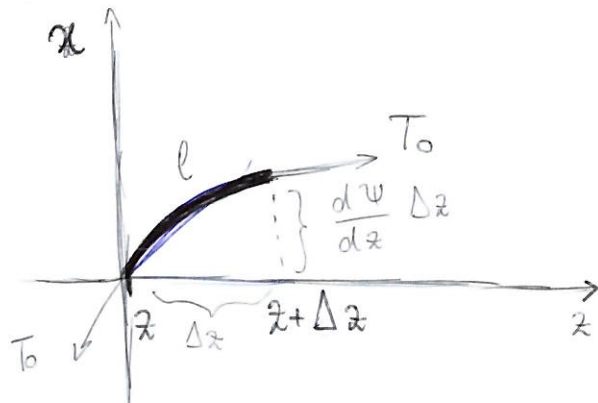
- Condizione che le perturbazioni siano piccole: e' brutto scrivere $\psi \ll L$ perché non voglio far dipendere ψ da L .

Posso però scrivere che l'inclinazione della perturbazione sia piccola:

$$\frac{d\psi}{dz} \ll 1 \quad \forall z \in [0, L], \forall t$$

Chiamo $\frac{d\psi}{dz} = \epsilon$. Sarà il nostro **PARAMETRO DI PICCOLEZZA**

Analizziamo un pezzettino di corda perturbata



~~Il pezzettino di corda perturbata~~

$$l = \sqrt{\Delta z^2 + \left(\frac{d\psi}{dz} \Delta z\right)^2} = \Delta z \sqrt{1 + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2} = \Delta z \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

Se ε è piccolo, posso sviluppare con Taylor:

$$l = \Delta z \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2\right) = \Delta z$$

→ INFINITESIMO DEL II ORDINE: TRASCURABILE

⇒ Posso approssimare l con Δz

Forza agente sul punto ^{generico} z : $F = T_0$

La scomposizione in coordinate:
$$\begin{cases} F_x = T_0 \sin \theta \\ F_z = T_0 \cos \theta \end{cases}$$

Sappiamo che $\tan \theta = \frac{d\psi}{dz}$. Poiché $\frac{d\psi}{dz}$ è piccola ⇒

⇒ $\tan \theta$ è piccola ⇒ $\tan \theta \approx \sin \theta$
 $\cos \theta \approx 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = T_0 \frac{d\psi}{dz} \\ F_z = T_0 \end{cases}$$

\Rightarrow la forza totale sul pezzettino di corda che stiamo analizzando è uguale alla somma delle forze agenti sugli estremi (nei punti centrali abbiamo detto che la risultante è 0)

\Rightarrow Lungo l'asse z , $F_{z \text{ tot}} = F_z(z) + F_z(z + \Delta z) = -T_0 + T_0 = 0$

\Rightarrow Se ho una **perturbazione trasversale**, **LA CORDA NON SI MUOVE LUNGO z**

\Rightarrow si sposta solo in direzione verticale \Rightarrow **non ho trasporto di massa**

$$\Rightarrow F_{\text{Tot}} = F_x(z) + F_x(z + \Delta z) = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}(z + \Delta z, t) - T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) =$$

$$= T_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial z}(z + \Delta z, t) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) \right] \cdot \frac{\Delta z}{\Delta z} =$$

$$= T_0 \Delta z \left[\frac{\frac{d\psi}{dz}(z + \Delta z, t) - \frac{d\psi}{dz}(z, t)}{\Delta z} \right] \leftarrow \text{rapporto incrementale della funzione } \frac{d\psi}{dz}$$

Facciamo tendere $\Delta z \rightarrow 0$

$$\Rightarrow F_{\text{Tot}} = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Applico il II principio della dinamica

$$F_{\text{Tot}} = ma = \rho \Delta z a = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \rho \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Equaglo le due equazioni per F_{Tot}

$$\rho \cancel{\Delta z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_0 \cancel{\Delta z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}$$

EQUAZIONE DI D'ALEMBERT

Equazione delle onde

Equazione differenziale delle derivate parziali, di II ordine, lineare
(vale principio di sovrapposizione)

$\frac{T_0}{\rho}$ e' un parametro che combina elasticità e inerzia della corda

Ha le dimensioni di una velocità al quadrato.



CORDA VINCOLATA A ENTRAMBI GLI ESTREMI

Vincolata agli estremi $\Rightarrow \psi(0, t) = 0 \quad \forall t$

$$\psi(L, t) = 0 \quad \forall t$$

CONDIZIONI AL CONTOURNO

Scrivo l'equazione ~~di D'Alembert~~ dell'onda come **prodotto di funzioni**, una che dipende solo dal tempo e una che dipende solo dallo spazio

$$\psi(x, t) = S(x) C(t)$$

La sostituisco nell'equazione di D'Alembert

$$S(x) \frac{d^2 C(t)}{dt^2} = \frac{T_0}{\rho} C(t) \frac{d^2 S(x)}{dx^2}$$

Separo le due variabili e scrivo $\frac{T_0}{\rho} = v^2$

$$\frac{1}{C(t)} \frac{d^2 C(t)}{dt^2} = v^2 \frac{1}{S(x)} \frac{d^2 S(x)}{dx^2}$$

Poiché abbiamo a sx qualcosa che dipende da t e a dx qualcosa che non dipende da t , la quantità a sx dell'uguale deve essere costante (quindi anche la quantità a dx).

$f(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow l \text{ e } \rho \text{ costanti}$

Chiamo la costante $-\omega^2$

$$\frac{d^2 C(t)}{dt^2} = -\omega^2 C(t)$$

ricorda la forma

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x, \text{ con } \frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\frac{d^2 S(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} S(x)$$

$$\text{con } \frac{\omega}{v} = k$$

Sappiamo che la prima equazione ha come soluzione

$$C(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

data dalla combinazione delle due soluzioni reali.

La seconda equazione ha invece come soluzioni reali

$$S_1(x) = \cos\left(\frac{\omega^2}{v^2} x\right) = \cos(kx)$$

$$S_2(x) = \sin\left(\frac{\omega^2}{v^2} x\right) = \sin kx$$

$$\text{dove } k = \frac{\omega}{v}$$

$$\Rightarrow S(x) = \alpha \cos\left(k \frac{x}{v}\right) + \beta \sin\left(k \frac{x}{v}\right)$$

Adesso impongo le condizioni di ~~contorno~~ ~~vincolata~~ ~~agli estremi~~ contorno

$$S(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$S(L) = 0 \Rightarrow \beta \sin(kL) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0$$

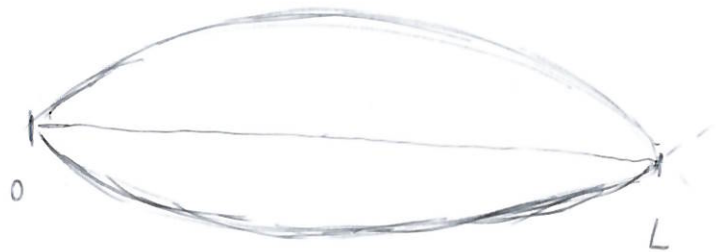
$$\Rightarrow \boxed{kL = 0 + m\pi} \quad \text{con } m \in \mathbb{N}$$

$$k = \frac{m\pi}{L} = \frac{\omega}{v} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{m\pi v}{L}}$$

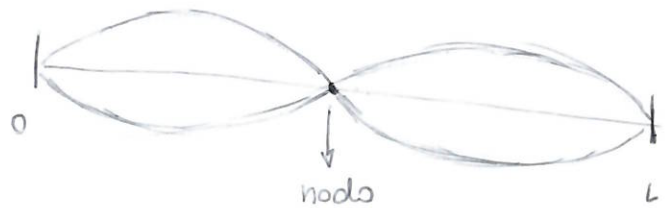
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f &= \frac{mv}{2L} \\ \lambda &= \frac{2L}{m} \end{aligned}}$$

Questa e' la soluzione del moto che descrive i **modi stazionari** (o **normali**) di una corda

$$m=1 \Rightarrow \begin{aligned} f_1 &= \frac{v}{2L} \\ \lambda_1 &= 2L \end{aligned}$$



$$m=2 \Rightarrow \begin{aligned} f_2 &= \frac{v}{L} \\ \lambda_2 &= L \end{aligned}$$



$$m=3 \Rightarrow \begin{aligned} f_3 &= \frac{3v}{2L} \\ \lambda &= \frac{2}{3}L \end{aligned}$$



Istanti di ampiezza massima

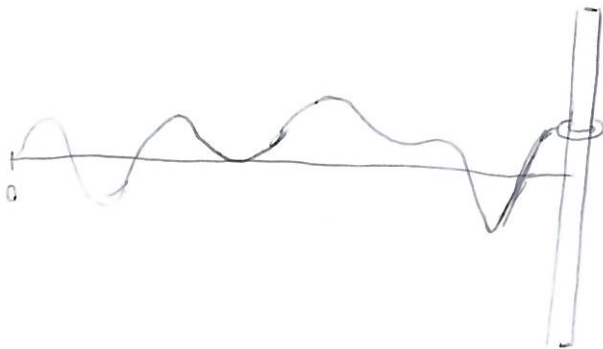
Nei punti chiamati **NODI** (z_n) la corda **non oscilla**, come agli estremi.

z_n è soluzione dell'equazione t.c. **$\Psi(z_n, t) = 0 \quad \forall t$**

CORDA VINCOLATA A UN ESTREMO

Un estremo è fisso, mentre l'altro è libero di muoversi trasversalmente alla direzione z

Immagino un anello nell'estremo libero che scorre su una guida verticale senza attrito



La tensione è sempre tutta sull'asse ~~asse~~ z (perché non c'è attrito)

$$\Rightarrow \boxed{\left. \frac{d\Psi(z, t)}{dz} \right|_L = 0 \quad \forall t}$$

Quindi, le nostre due nuove condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} \Psi(0, t) = S(0) = 0 \\ \left. \frac{d\Psi(z, t)}{dz} \right|_L = \left. \frac{dS(z)}{dz} \right|_L = 0 \end{cases}$$

Precedentemente avevamo trovato che $S(x) = \beta \sin(kx)$,

quindi $\frac{dS(x)}{dx} = k\beta \cos(kx)$

$$\left. \frac{dS(x)}{dx} \right|_L = 0 \Rightarrow k\beta \cos(kx) \Big|_L = 0 \Rightarrow \cancel{k\beta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots}$$

$$\Rightarrow k\beta \cos(kL) = 0 \Rightarrow \boxed{kL = (2n-1) \frac{\pi}{2}}$$

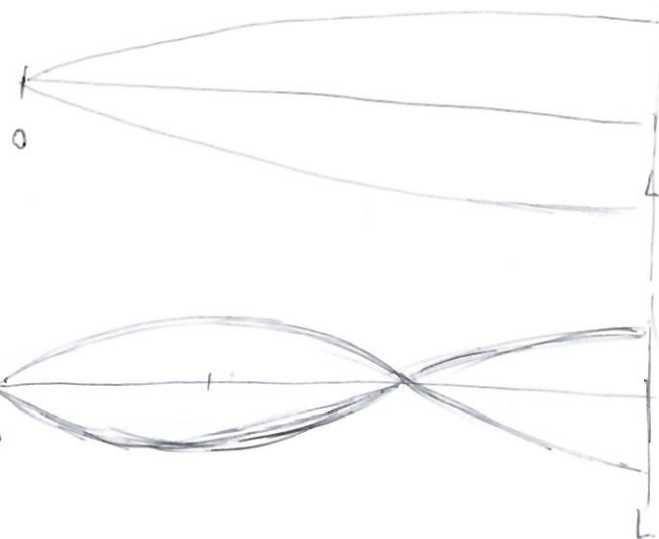
Da questo possiamo ricavare le frequenze caratteristiche della corda

$$n=1 \Rightarrow f_1 = \frac{v}{4L}$$

$$\lambda_1 = 4L$$

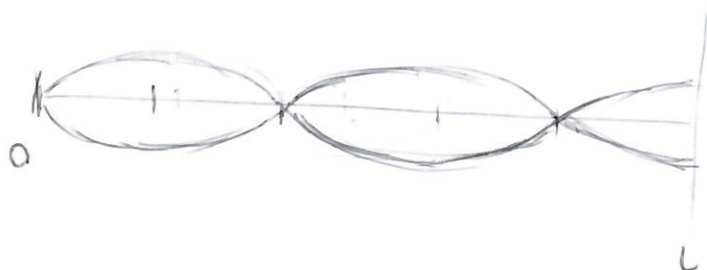
$$n=2 \Rightarrow f_2 = \frac{3}{4} \frac{v}{L}$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{3} L$$



$$n=3 \Rightarrow f_3 = \frac{5}{4} \frac{v}{L}$$

$$\lambda_3 = \frac{4}{5} L$$



Infatti,

$$\boxed{f = \frac{2n-1}{4} \frac{v}{L}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{4L}{2n-1}}$$

⚠ Più spesso viene usata la notazione $f = \frac{m}{4} \frac{v}{L}$ $\lambda = \frac{4L}{m}$,
dove $m = 2n-1 \Rightarrow m = 1, 3, 5, 7, \dots$. In questo caso, $\lambda_2 = \frac{4}{3} \neq \frac{5}{4}$!

SOLUZIONE EQUAZIONE DI D'ALEMBERT

(*)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Osservazioni

- Non assomiglia a una forza di richiamo di tipo elastico. Questo perché non abbiamo da una parte la molla e dall'altra la massa: ogni pezzettino di corda è sia massa che molla, e si comporta in modo sia inerziale che elastico.

- Se fisso t , $\psi(x)$ ~~mi dice come si muove un punto nel tempo~~ è una fotografia istantanea della corda.
Se fisso x , $\psi(t)$ mi dice come si muove un punto nel tempo.

- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ mi dice la CONCAVITÀ della curva. La derivata seconda

$e' \neq 0 \Rightarrow$ la corda è CURVA

Quando $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ è NEGATIVA ~~la derivata seconda è negativa~~

$\rightarrow T_0$ è negativa \rightarrow agisce come FORZA DI RICHIAMO



- L'equazione di D'Alembert ci fornisce una DEFINIZIONE di ONDA SULLA CORDA: essa è una FUNZIONE in spazio e tempo per cui sia verificata l'equazione di D'Alembert

L'equazione di d'Alembert dipende da **due variabili**:

creo una funzione ψ^* , che dipende da una sola variabile $z-vt$ tale che

$$\psi(z,t) = \psi^*(z-vt)$$

Poiché $z-vt = f(z,t)$ a sua volta (infatti v è un parametro) possiamo vedere $\psi^*(z-vt)$ come una composizione di funzioni

$$\psi(z,t) = \psi^*(z-vt) = \psi^*(f(z,t))$$

Deriviamo ψ^* :

$$\bullet \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} = \frac{d\psi^*(z-vt)}{df} \cdot \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} = \frac{d\psi^*(z-vt)}{df} \cdot 1 = \frac{d\psi^*(z-vt)}{df}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z,t) = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\psi^*(z-vt)}{df} \right) = \frac{d^2\psi^*}{df^2} \cdot \frac{df}{dz} = \frac{d^2\psi^*(z-vt)}{df^2}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(z,t) = \frac{d^2\psi^*(z-vt)}{df^2} \cdot \frac{\partial^2 f(z,t)}{\partial t^2} = \frac{d^2\psi^*}{df^2} \cdot (-v) = -v \frac{d^2\psi^*}{df^2}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(z,t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\psi^*(f(z,t))}{df} \cdot (-v) \right) = +v^2 \frac{d^2\psi^*}{df^2}$$

Mettiamole dentro la nostra equazione di D'Alembert:

$$\frac{d^2\psi^*}{df^2} \cdot v^2 = \frac{T_0}{\rho} \frac{d^2\psi^*}{df^2} \implies v^2 = \frac{T_0}{\rho}$$

\implies l'equazione è soddisfatta solo se $v = \pm \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$

$$\implies \psi = \psi^*(z \pm vt)$$

8 Sappiamo che $f(x-x_0)$ è uguale a $f(x)$ traslata di x_0 ,
Quindi, al tempo t , la perturbazione trasla di $\pm vt$

Quindi ho due onde: $\left\{ \begin{array}{l} \psi_p^* = \psi^*(x-vt) \text{ PROGRESSIVA} \\ \text{si sposta con velocità } v \text{ verso dx} \\ \psi_r^* = \psi^*(x+vt) \text{ REGRESSIVA} \\ \text{si sposta con velocità } v \text{ verso sx} \end{array} \right.$

Se ho una corda infinita, la soluzione dell'equazione delle onde
è la sovrapposizione di queste due equazioni (infatti vale il princ. di sovrapposizione)

$$\psi(x,t) = \psi_p^*(x-vt) + \psi_r^*(x+vt)$$

(in cui deve continuare a valere $\frac{d\psi}{dx} \ll 1$)

v è detta velocità di fase dell'onda. È la velocità
con cui la perturbazione si propaga (la corda non
si sposta).

Per le onde armoniche, $v = \lambda \nu$

L'equazione di D'Alembert contiene implicitamente le due equazioni per le onde progressive e regressive

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

ONDE PROGRESSIVE

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = v \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

ONDE REGRESSIVE

infatti:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi^*}{\partial f} \cdot (-v) = \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot (-v)$$

infatti:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi^*}{\partial f} \cdot v = \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot v$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi = 0$$

una specie di differenza tra quadrati

OPERATORE D'ALBERTIANO

PROPAGAZIONE ONDE ARMONICHE

Ho una corda vincolata a un estremo. All'altro estremo impongo un'oscillazione armonica

$$\psi(0, t) = A \cos(\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v$$

Dopo un tempo t , la perturbazione si è spostata di vt .
 Dopo un periodo T , la perturbazione si è spostata di vT .
 Chiamo questa quantità **LUNGHEZZA D'ONDA λ**

(31)

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}$$

Grafico $\Psi - t$

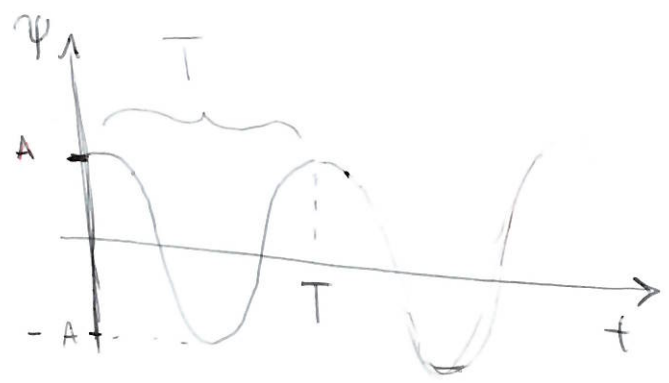
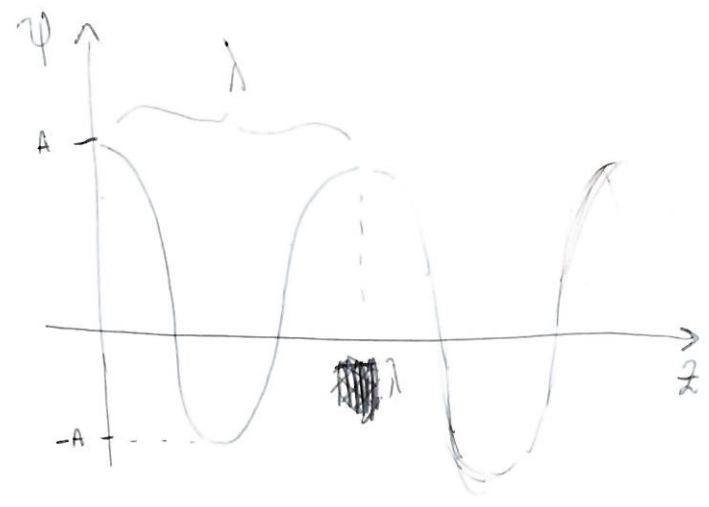


Grafico $\Psi - z$



Ho una sinusoide sia nel tempo che nello spazio
 in qualsiasi punto
 l'equazione deve dipendere da $\phi(z-vt)$ e deve essere
 nella forma $A \cos(\star(z-vt))$. Dobbiamo cosa
 mettere al posto di \star per far sì che l'argomento del
 coseno sia un angolo. Io so che λ corrisponde a un
 angolo di 2π (corrisponde a un periodo), quindi basta
 vedere quanti λ ci stanno in $(z-vt)$ e moltiplicare per 2π

$$\Rightarrow \Psi(z,t) = A \cos \left[\frac{2\pi (z-vt)}{\lambda} \right]$$

Chiamo la quantità $\frac{2\pi}{\lambda}$ **NUMERO D'ONDA** (k)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi(z,t) = A \cos(kz - \omega t)}$$

EQUAZIONE ONDE
ARMONICHE

A seconda delle condizioni di oscillazione, potrebbe essere presente una costante di fase φ

$$\Psi(z,t) = A \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

Posso raccogliere k e scrivere l'equazione come

$$\Psi(z,t) = A \cos\left(k\left(z - \frac{\omega}{k}t\right) + \varphi\right)$$

e in questo modo noto che

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = v}$$

Infatti $v = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$



Volendo, all'equazione delle onde armoniche, posso arrivare anche in un altro modo.

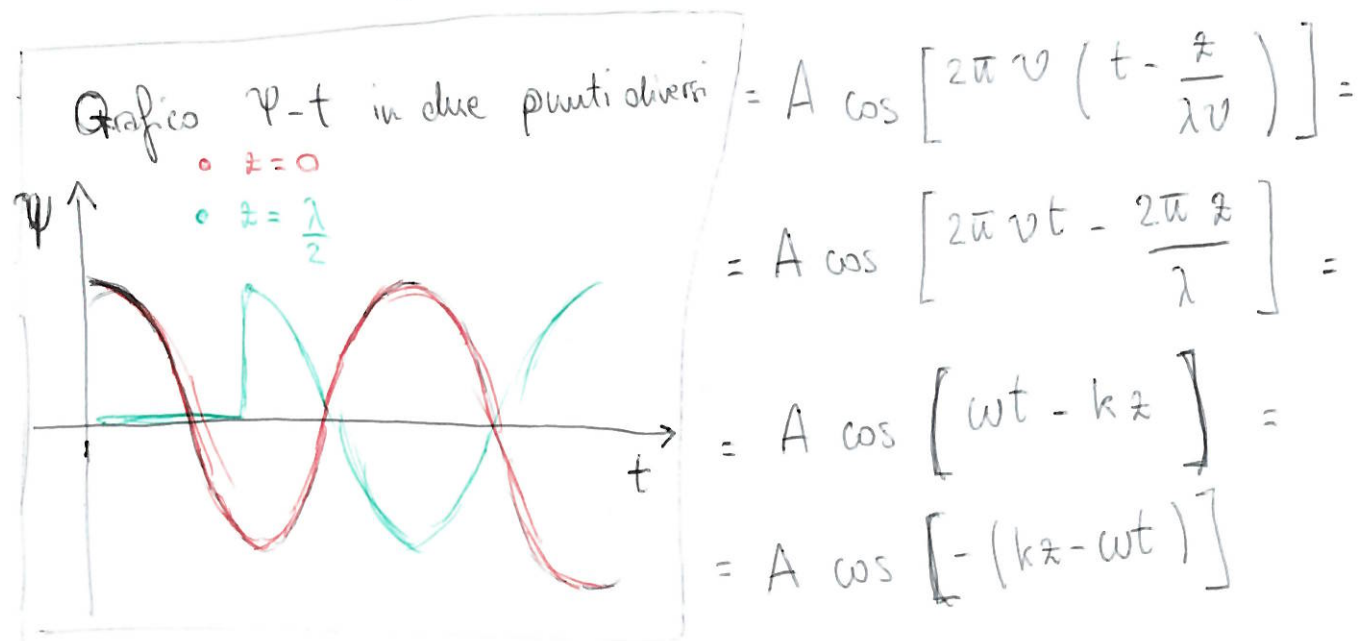
Parto sempre da $\Psi(0,t) = A \cos(\omega t)$

Mentre $z=0$ oscilla, la perturbazione si muove lungo la corda con velocità v .

Quindi un generico punto z si muove come ~~il~~ ~~punto~~ ~~z=0~~ con un ritardo $\frac{z}{v}$

Quindi il grafico $\Psi-t$ nel punto z sarà sfasato di $\frac{z}{v}$ rispetto al grafico nel punto $z=0$

Quindi, nel generico punto z , $\Psi(z,t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right]$



Poiché $\cos \theta = \cos(-\theta)$,

$$\Psi(z,t) = A \cos(kz - \omega t)$$

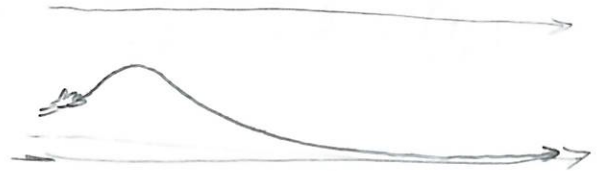
ENERGIA SULLA CORDA

Dimostriamo che è vero che un'onda è una **perturbazione** che **trasporta energia** ma **non materia**.

Abbiamo già visto che non trasporta massa \rightarrow vediamo cosa succede all'energia

Ho una corda seminfinita

La perturbo a un estremo



Se la sposto dalla sua condizione di equilibrio, devo contrastare la **componente verticale della tensione**

FORZA ESERCITATA DALLA CORDA
SULLA MIA MANO:

$$F_{x_c} = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

FORZA CHE ESERCITO SULLA
CORDA (uguale e opposta)

$$F_{x_n} = -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Produco uno **spostamento** \Rightarrow compio **LAVORO**

$$dW = F_{x_n} \cdot d\psi = -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \partial \psi$$

Quanto ci mette a trasferire quest'energia? Guardiamo la **potenza**

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Ipotizziamo che io stia perturbando la corda in modo armonico: allora sappiamo che $\psi(0,t) = A \cos(\omega t)$ e

$$\psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Mettiamo questa equazione in quella della potenza

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Ak \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = T_0 A^2 k \omega \sin^2(kx - \omega t)$$

POTENZA ISTANTANEA
TRASPORTATA DA
UN'ONDA ARMONICA

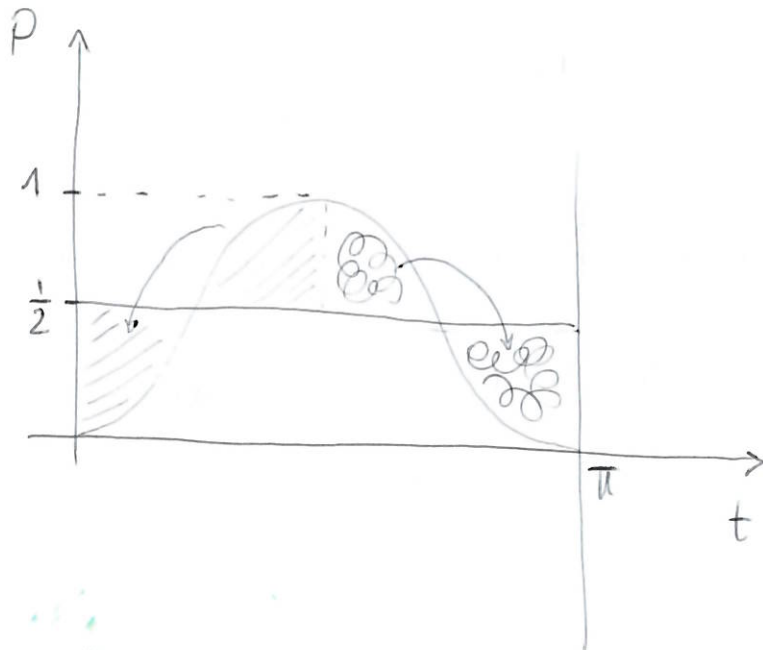
È una funzione che dipende da $(x - vt)$ \Rightarrow risolve l'equazione di D'Alembert

Ho un $\sin^2 \Rightarrow T$ è dimezzato, ma anche λ è dimezzato ~~non~~

\Rightarrow l'energia che fornisco all'onda viene **trasportata con**
velocità v

\Rightarrow l'onda e l'energia che essa trasporta si propagano con la stessa velocità

Potenza media: il valore medio di \sin^2 in un periodo di oscillazione



Media integrale:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi =$$

~~scribble~~

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \left[-\sin \alpha \cos \alpha + \alpha \right]_0^{\pi} = \frac{-1 + \pi + 1}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_m = \frac{1}{2} T_0 A^2 k \omega$$

POTENZA MEDIA
TRASPORTATA DA
UN'ONDA ARMONICA

FINE *

CAMBIO DI MEZZO DI PROPAGAZIONE



Due corde semifinite che si congiungono in $z=0$

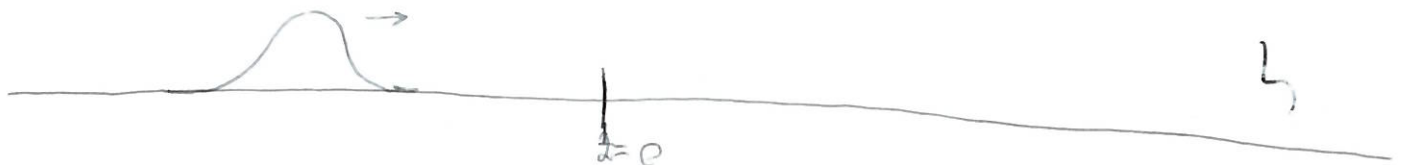
Stessa tensione, ma densità diverse \Rightarrow diverse velocità

$$v_1 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_1}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_2}}$$

Sulla **corda 1** applichiamo una **perturbazione incidente**,
che si propaga fino ad arrivare a $z=0$.

Cosa succede poi?



Perturbazione incidente: $\psi_i(z - v_1 t)$

In $z=0$ una parte dell'onda viene **TRASMESSA** alla corda 2
e una parte dell'onda viene **RIFLESSA** sulla corda 1

Quindi avremo una perturbazione trasmessa $\psi_t(z - v_2 t)$
e una perturbazione incidente riflessa $\psi_r(z + v_1 t)$

Per creare il nostro modello, poniamo alcune condizioni:

- la corda è **continua** → non deve spezzarsi in $z=0$
 → in $z=0$, avrà una perturbazione totale

$$\Psi_i + \Psi_r = \Psi_t \quad \begin{matrix} z=0 \\ \forall t \end{matrix}$$

CONDIZIONE DI CONTINUITÀ DELLA CORDA

- l'energia si **conserva** ⇒ in $z=0$ l'energia incidente si ripartisce in energia riflessa e trasmessa

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_r + \mathcal{P}_t \quad \begin{matrix} z=0 \\ \forall t \end{matrix}$$

BIANCIO ENERGETICO

- Consideriamo il caso semplice di **onde armoniche**

Impongo una certa ω alla corda 1 perturbandola ⇒ l'onda incidente mette in moto il punto $z=0$ con la stessa ω ⇒ $z=0$ genera le onde riflessa e trasmessa con la stessa ω

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$ La pulsazione si conserva ⇒ si conservano T_1, v

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

Il numero d'onda cambia a seconda della corda

⇒ Le tre onde avranno le seguenti equazioni:

$$\Psi_i(z,t) = \Psi_{0i} \cos(k_1 z - \omega t) \quad \text{INCIDENTE}$$

$$\Psi_t(z,t) = \Psi_{0t} \cos(k_2 z - \omega t) \quad \text{TRASMESSA}$$

$$\Psi_r(z,t) = \Psi_{0r} \cos(k_1 z + \omega t) \quad \text{RIFLESSA}$$

Per trovare le ampiezze usiamo le condizioni poste in $z=0$

CONTINUITA' $\Psi_{0i} \cos(-\omega t) + \Psi_{0r} \cos(\omega t) = \Psi_{0t} \cos(-\omega t) \quad \forall t$

$\cos \theta = \cos(-\theta) \Rightarrow$ posso semplificare

$$\Psi_{0i} + \Psi_{0r} = \Psi_{0t}$$

I condizione sulle ampiezze

ENERGIA

$$T_0 \Psi_{0i}^2 k_1 \omega \sin^2(-\omega t) = T_0 \Psi_{0r}^2 k_1 \omega \sin^2(\omega t) + T_0 \Psi_{0t}^2 k_2 \omega \sin^2(-\omega t)$$

\sin^2 e' pari \Rightarrow posso semplificarlo

Semplifico anche T_0 e ω

$$\Psi_{0i}^2 k_1 = \Psi_{0r}^2 k_1 + \Psi_{0t}^2 k_2$$

II condit sulle ampiezze
(i k sono noti)

Metto a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} \psi_{oi} + \psi_{or} = \psi_{ot} \\ \psi_{oi}^2 k_1 = \psi_{or}^2 k_1 + \psi_{ot}^2 k_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \frac{\psi_{or}}{\psi_{oi}} = \frac{\psi_{ot}}{\psi_{oi}} \\ 1 = \frac{\psi_{or}^2 \cancel{k_1}}{\psi_{oi}^2 \cancel{k_1}} + \frac{\psi_{ot}^2 k_2}{\psi_{oi}^2 k_1} \end{cases}$$

Chiamo $r = \frac{\psi_{or}}{\psi_{oi}}$ coefficiente di riflessione per l'ampiezza

$t = \frac{\psi_{ot}}{\psi_{oi}}$ coefficiente di trasmissione per l'ampiezza

$R = \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i}$ coefficiente di riflessione per la potenza

$T = \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_i}$ coefficiente di trasmissione per la potenza

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + r = t \\ 1 = r^2 + t^2 \frac{k_2}{k_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = t - 1 \\ 1 = (t-1)^2 + t^2 \frac{k_2}{k_1} \end{cases}$$

$$1 = t^2 - 2t + 1 + t^2 \frac{k_2}{k_1}$$

$$t^2 (k_1 + k_2) = 2t k_1$$

$$t (k_1 + k_2) = 2k_1$$

$$\Rightarrow t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$r = t - 1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} - \frac{k_1 + k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\frac{w}{k} = v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \Rightarrow k \propto \sqrt{\rho}$$

\Rightarrow posso scrivere t e r in funzione della densità

$$t = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

$$r = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

A meno di costanti moltiplicative che sono uguali per le due corde

Posso anche scrivere R e T in funzione di r e t

$$R = r^2$$

$$T = t^2 \frac{k_2}{k_1} = 1 - r^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

R e T sono espressioni **simmetriche** rispetto a k_1 e k_2
 \Rightarrow non importa se sto andando dalla corda 1 alla corda
2 o viceversa, l'energia si ripartisce nello stesso modo.

Questo non succede con r e t . Le ampiezze cambiano
se vado da una corda piú densa a una piú leggera
o viceversa.

ACUSTICA

Ci occupiamo di onde in un mezzo **continuo** e

Tridimensionale: l'**ARIA**.

È un mezzo continuo: posso andare a considerare volumi sempre più piccoli senza accorgermi della natura **discreta** dell'elemento.

Questa in realtà è un'astrazione perché a un certo punto avrò un volumetto contenente una singola molecola (→ non più scomponibile) ⇒ devo considerare un volume **macroscopicamente piccolo** ma che contiene comunque **tantissime molecole**.

Poiché l'aria è un mezzo continuo, non ha più senso parlare di **massa di un corpo**, perché non esistono corpi separati; solo mezzi continui in cui ogni porzione ha massa diversa (basta prenderne con volumi diversi)

⇒ introduco il concetto di **densità**:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

che si misura in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Un'altra grandezza fondamentale nello studio dei fluidi
è la **pressione**

$$P = \frac{F}{S}$$

Anche per l'aria dobbiamo introdurre alcune **approssimazioni**

- fluido perfettamente **viscoso** (\rightarrow la perturbazione è **uniforme** in tutta la superficie)
- fluido perfettamente **elastico** (per quanto riguarda la compressione, infatti i fluidi non ~~non~~ rispondono elasticamente agli sforzi di taglio)
- fluido divisibile in **volumetti infinitesimi** che però contengono un numero enorme di molecole

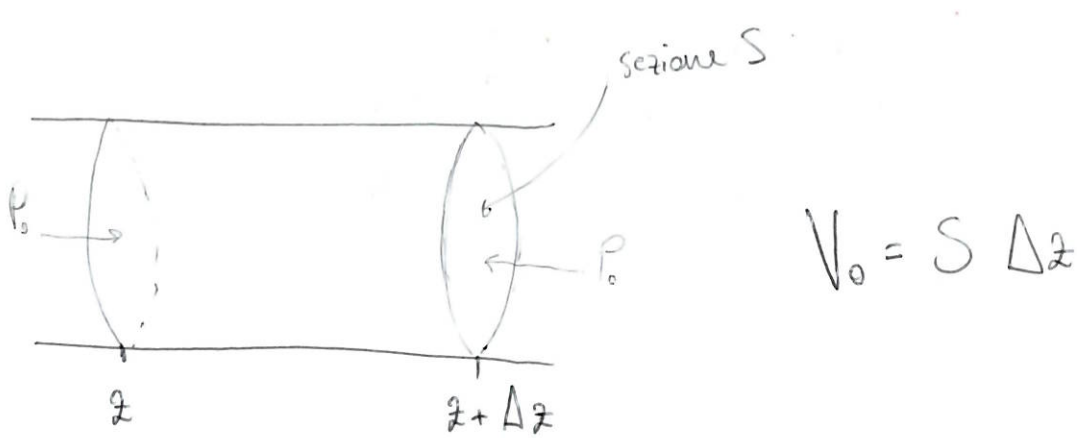
MODELLO: lungo **tubo** con sezione S costante (si può considerare monodimensionale)

Nello stato imperturbato esso ha **pressione P_0** , costante in tutto il tubo, e **densità ρ_0**

Condizioni standard al livello del mare a 0°C :

$$P_0 = 10^5 \text{ Pa}$$

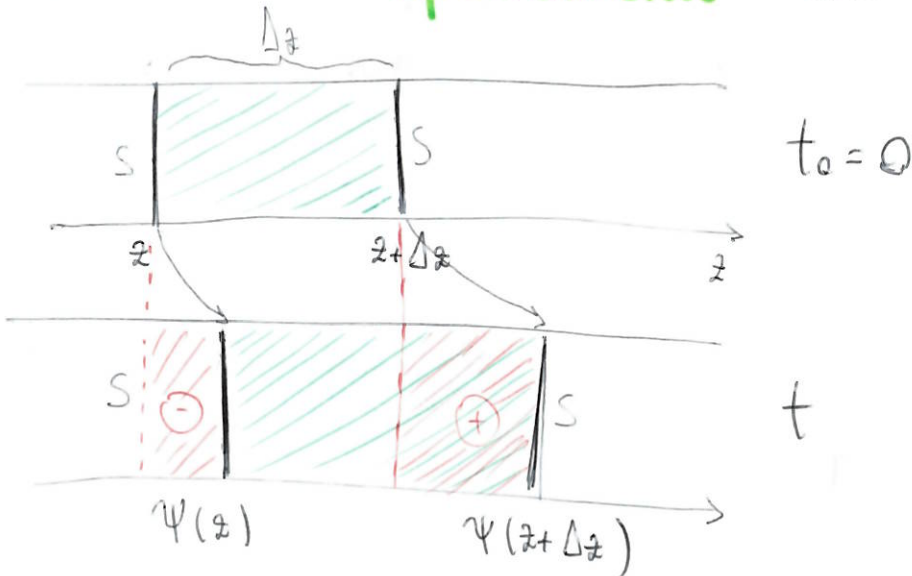
$$\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$$



Il volumetto è sottoposto a P_0 sia dal fluido che precede sia dal fluido che segue

$$m = \rho_0 V_0 = \rho_0 S \Delta z \quad \underline{\underline{\text{COSTANTE}}}$$

Genero uno **spostamento** dell'aria dentro il tubo



$$\begin{aligned} \Delta V &= S \cdot \psi(z + \Delta z, t) - S \cdot \psi(z, t) = S (\psi(z + \Delta z, t) - \psi(z, t)) \\ &= S \cdot \Delta z \left[\frac{\psi(z + \Delta z, t) - \psi(z, t)}{\Delta z} \right] = V_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned}$$

Mettiamo come al solito l'ipotesi di piccole perturbazioni: $\frac{\partial \psi}{\partial z} \ll 1$

$$\Rightarrow \Delta V \ll V_0$$

==> VARIAZIONE DI VOLUME:

$$\Delta V = V_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Come cambia invece la densità rispetto alla variaz di volume?

~~Equation~~ $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0 V_0}{V}$

Io so che $\Delta f = f'(x_0) \Delta x \implies \Delta \rho = \left. \frac{d\rho}{dV} \right|_{V_0} \Delta V$

==> $\Delta \rho = \left. \frac{d}{dV} \frac{\rho_0 V_0}{V} \right|_{V_0} \Delta V = -\frac{\rho_0 V_0}{V_0^2} \Delta V = -\rho_0 \frac{\Delta V}{V_0} = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}$

==> VARIAZIONE DI DENSITA':

$$\Delta \rho = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Analizziamo anche la pressione. Poiché la pressione è molto difficile da studiare (può variare in tutti i modi), la studiamo rispetto alla densità.

~~Equation~~ $P = P(\rho, T)$

Come prima: $\Delta f = f'(x_0) \Delta x \implies \Delta P = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho, T} \Delta \rho$

==> $\Delta P = -\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho, T} \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}$

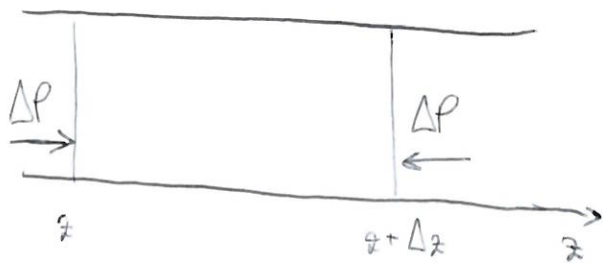
Chiamo $B = \rho_0 \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho, T}$ coefficiente di compressibilità

==> VARIAZIONE DI PRESSIONE

$$\Delta P = -B \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Notiamo che la variazione di volume è inversamente proporzionale alla variazione di ~~volume~~ densità (se il volume aumenta, la densità diminuisce e viceversa)

Adesso possiamo **calcolare la forza** e applicare il **II principio della dinamica**



$$P = \frac{F}{S}$$

$$\rightarrow F_1(z, t) = S \Delta P(z, t)$$

$$F_2(z + \Delta z, t) = S \Delta P(z + \Delta z, t)$$

$$\boxed{F_z} = S \cdot \Delta P(z, t) - S \Delta P(z + \Delta z, t) = -S [\Delta P(z + \Delta z, t) - \Delta P(z, t)]$$

$$= -S \Delta z \left[\frac{\Delta P(z + \Delta z, t) - \Delta P(z, t)}{\Delta z} \right] = -S \Delta z \frac{\partial \Delta P}{\partial z} =$$

$$= -S \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(-B \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = -S \Delta z B \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \boxed{V_0 B \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}$$

Questa la devo eguagliare a $m \cdot a = \rho_0 \cdot V_0 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \rho_0 \cdot V_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = V_0 B \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}$$

Abbiamo trovato un'equazione di D'Alembert anche per le onde acustiche!

In questo caso, $v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$

Poiché $B = \rho_0 \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{P_0, T_0}$,

$$v = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{P_0, T_0}}$$

Per capire il valore di v , dobbiamo trovare il legame tra P e ρ .

Dalla termodinamica sappiamo che

$$PV = N k_B T$$

EQUAZIONE GAS PERFETTI

N = numero di molecole

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Ipotesi di Newton

Newton ipotizzò che la propagazione del suono sia **isoterma**
($\Rightarrow T$ costante)

$$\Rightarrow P = \frac{N k_B T}{V}$$

Introduco la massa media delle molecole dell'aria μ

$$P = \frac{N k_B T \cdot \mu}{V \cdot \mu} = \frac{k_B T (m)}{\mu \cdot (V)} = \frac{k_B T}{\mu} \rho$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{k_B T}{\mu} \rho_0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu}} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{10^5 \text{ Pa}}{1.3 \text{ kg/m}^3}} \approx 300 \text{ m/s}$$

Ma sulla Terra si misura una velocità del suono un po' più alta (330-340 m/s) \Rightarrow c'è un DIFETTO

Ipotesi di Laplace

Laplace ipotizzò che il suono si propaghi con **trasformazioni adiabatiche**, cioè trasformazioni molto veloci in cui non c'è scambio di calore con l'esterno.

Gli sbalzi di temperatura sono così veloci che non riusciamo a percepirla.

Veloce espansione del gas \rightarrow crollo temperatura. E viceversa.

Nelle trasformazioni adiabatiche, $PV^\gamma = \text{costante}$

con $\gamma = \frac{f+2}{f}$ $f = \text{n}^\circ$ di gradi di libertà della molecola di gas

Aria: composta da MOLECOLE BIATOMICHE (N_2, O_2, H_2)

\Rightarrow 5 gradi di libertà $\Rightarrow \gamma = 1.4$

$$PV^\gamma = \text{cost} = P_0 V_0^\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma = \left(\frac{mV_0}{mV} \right)^\gamma = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

$$\Rightarrow P = P_0 \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial P}{\partial \rho} \right]_{\rho_0, T_0} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \cdot \gamma \cdot \rho^{\gamma-1} \Big|_{\rho_0, T_0} =$$

$$= \frac{P_0 \gamma \rho_0^{\gamma-1}}{\rho_0^\gamma} = \frac{P_0 \gamma}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{1.4 \frac{10^5 \text{ Pa}}{1.3 \text{ kg/m}^3}} \approx 330 \text{ m/s}$$

Abbiamo introdotto il fattore di correzione γ che fa tornare i conti.

È poiché $P_0 = \rho_0 \frac{k_B T}{\mu}$ (per la legge dei gas perfetti),

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{\mu}}$$

\Rightarrow dipende solo dalla temperatura

Possiamo quindi finalmente scrivere l'equazione della variazione di pressione (onda di pressione)

$$\Delta P = -\gamma P_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Cosa possiamo dire invece sulle variazioni di temperatura?

Dall'equazione dei gas perfetti so che $T = \frac{1}{N k_B} P V$

\Rightarrow e' una funzione in due variabili, P e V .

So che ~~...~~ $\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y$

$$\Rightarrow \Delta T = \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_{P_0} \Delta P + \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_{V_0} \Delta V = \left. \frac{V}{N k_B} \right|_{V_0} \Delta P + \left. \frac{P}{N k_B} \right|_{P_0} \Delta V =$$

$$= \frac{1}{N k_B} \left[V \Delta P + P \Delta V \right]_{P_0, V_0} = \frac{1}{N k_B} [V_0 \Delta P + P_0 \Delta V] =$$

$$= \frac{1}{N k_B} \left[-V_0 \gamma P_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} + P_0 V_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] =$$

$$= \frac{1}{N k_B} \frac{\partial \psi}{\partial z} P_0 V_0 (1-\gamma) = T_0 (1-\gamma) \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \Delta T = (1-\gamma) T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Poiché $\gamma = 1.4$, la quantità $(1-\gamma)$ è < 0

\Rightarrow se $\frac{\partial \psi}{\partial z} > 0$ (\Rightarrow espansione), $\Delta T < 0$ (abbassam. temperatur)

PROPAGAZIONE DEL SUONO IN SOLIDI e LIQUIDI

Liquidi: quasi incompressibili (molto poco comprimibili)

\Rightarrow a forti variazioni di pressione corrispondono piccole variazioni di densità $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial p}$ GRANDE

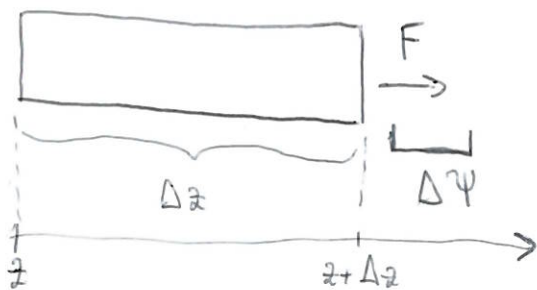
$v = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$ \Rightarrow velocità più elevata

(Infatti in acqua la velocità del suono è circa 1500 m/s)

In un liquido NON VALE $PV = Nk_B T$ \Rightarrow non posso calcolare v a partire da T

Solidi: i solidi si comportano diversamente dai fluidi, sono incompressibili e sopportano elasticamente sia COMPRESSIONI che SFORZI DI TAGLIO

Pensiamo un pezzettino di solido lungo Δz e tirandolo a un suo estremo, fino a farlo allungare di una grandezza $\Delta \psi$



Mi aspetto che $\Delta\psi$ sia:

- Direttamente proporzionale a F (se $\frac{\Delta\psi}{\Delta z} \ll 1$)
- Direttamente proporzionale a Δz
- Inversamente proporzionale a S (sezione solida)

\Rightarrow scrivo $\Delta\psi$ come

$$\Delta\psi = \frac{1}{E} \frac{F \cdot \Delta z}{S}$$

Chiamo E modulo elastico o modulo di Young

• Ricavo F :

$$F = \frac{ES \Delta\psi}{\Delta z}$$

mi è venuta fuori una specie di legge di Hooke

• Faccio tendere Δz a 0

$$F = ES \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Calcoliamo la forza sui due estremi di Δz

$$F_{TOT} = -F(z,t) + F(z+\Delta z,t) = ES \Delta z \left[\frac{\partial\psi}{\partial z}(z,t) - \frac{\partial\psi}{\partial z}(z+\Delta z,t) \right]$$

$$= ES \Delta z \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = EV \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Noi sappiamo che $F = m \cdot a = \rho V \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \rho V \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = E V \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

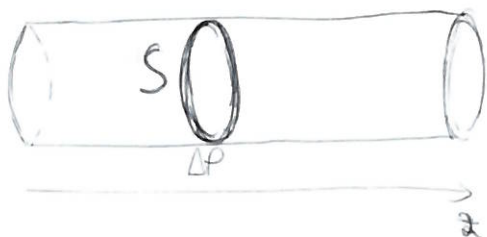
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di D'Alembert in cui

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ENERGIA ONDE ACUSTICHE

Riprendiamo il nostro tubo



La superficie si sposta \Rightarrow c'è una variazione di pressione che l'ha fatta spostare

$$\Delta P = \frac{F}{S}, \text{ dove } F \text{ è la forza con cui il gas antecedente a } S \text{ spinge su } S$$

$$\Rightarrow F_x = S \Delta P = -\gamma P_0 S \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Da qui possiamo calcolare il lavoro elementare:

$$dW = F_x d\psi = -\gamma P_0 S \frac{\partial \psi}{\partial x} d\psi$$

e possiamo trovare la potenza:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = -\gamma P_0 S \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Introduciamo l'**INTENSITA' ISTANTANEA** dell'onda,
cioè la potenza per unità di superficie

$$I = \frac{\mathcal{P}}{S} = -\gamma P_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Si misura in $\frac{W}{m^2}$

Onde armoniche: $\psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -Ak \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow I = \gamma P_0 A^2 k \omega \sin^2(kx - \omega t)$$

INTENSITA' ISTANTANEA DI
UN'ONDA ACUSTICA ARMONICA
DI PULSAZIONE ω
E NUMERO D'ONDA k

I è periodica \Rightarrow utile usare l'intensità media in un ciclo completo di oscillazione. So che il valor medio di \sin^2 è $\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow I_{\text{media}} = \frac{\gamma P_0}{2} A^2 k \omega$$

(Ricordo che le onde armoniche sono una bella idealizzazione ma non esistono nella realtà: infatti in fisica non si può avere un'onda infinita, perché significherebbe energia infinita. Spesso si trovano onde armoniche TRONCATE.)

Scriviamo una formula che legga l'onda di pressione e l'intensità
(nel caso di onde armoniche)

$$\Delta P = -\gamma P_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad \text{onda di pressione (generale)}$$

$$\Delta P = \gamma P_0 A k \sin(kz - \omega t) \quad \text{onda di pressione (onde armoniche)}$$

$$\Delta P_{\max} = \gamma P_0 A k \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\Delta P_{\max}}{\gamma P_0 k}$$

$$I = \frac{\gamma P_0}{2} A^2 k \omega \quad \Rightarrow \quad A^2 = \frac{2I}{\gamma P_0 k \omega}$$

Uguaglio:

$$\frac{\Delta P_{\max}^2}{\gamma^2 P_0^2 k^2} = \frac{2I}{\gamma P_0 k \omega}$$

$$\Delta P_{\max}^2 = \frac{2I}{\omega} \gamma P_0 k = \quad v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \Rightarrow \gamma P_0 = v^2 \rho_0$$

$$= \frac{2I}{\frac{\omega}{k}} v^2 \rho_0 = \frac{2I}{v} v^2 \rho_0 = 2I \rho_0 v$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta P_{\max} = \sqrt{2I \rho_0 v}}$$

Se conosco l'intensità, posso calcolare l'ampiezza dell'onda di pressione

PROPAGAZIONE TRIDIMENSIONALE SUONO

Per ora abbiamo preso in considerazione il caso particolare del suono che si propaga in un tubo \Rightarrow in una dimensione

Il suono, invece, da una sorgente puntiforme si propaga in **tutte le direzioni** (se non ci sono limitazioni) \Rightarrow viene emessa un' **onda sferica**.

Se in una dimensione $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, in 3 dimensioni basta

Sommare le derivate seconde sulle altre dimensioni

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2 \psi$$

Equazione un po' complicata

Dovremmo riscrivere l'equazione in coordinate sferiche, in modo che dipenda dal **tempo t** e dalla **distanza dalla sorgente r** .

$$\psi(r, t) = A(r) f(r - vt)$$

Penso all'ampiezza come dipendente da r perché l'energia si deve distribuire su spazi sempre più grandi man mano che mi allontano dalla sorgente.

Non ho più onde progressive e regressive ma ho onde **divergenti** e **convergenti**.

Nell'ambito acustico è pieno di onde divergenti, mentre quelle convergenti sono + rare.

FRONTE D'ONDA: regione connessa di punti in cui l'onda ha la stessa fase.

Onde piatte: hanno come fronte d'onda ~~dei~~ **piani** \perp alla direzione di propagazione

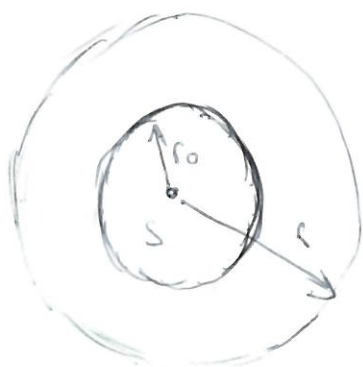
Onde sferiche: hanno come fronte d'onda delle **sfere** concentriche.

Nelle onde piane, l'**energia per unita' di superficie** propagata dall'onda rimane **costante**.

Questo **NON SUCCED**E nelle onde sferiche, perché l'energia viene **distribuita** su sfere di raggio sempre maggiore.

$$\Psi(r,t) = A(r) \cos(kr - \omega t)$$

Vediamo in che modo A dipende da r applicando la conservazione dell'energia.



L'energia si conserva \Rightarrow si conserva la **potenza** media \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = I(r_0) S(r_0) \text{ dove}$$

I = intensità istantanea lungo la cf di raggio r_0

S = superficie del fronte d'onda di raggio r_0

Poiché \mathcal{P} si conserva, vale anche

$$\mathcal{P} = I(r) S(r)$$

Uguagliando:

$$I(r_0) S(r_0) = I(r) S(r)$$

$$S(r_0) = 4\pi r_0^2$$

$$I(r_0) = \frac{\gamma P_0}{2} A^2(r_0) kw$$

$$S(r) = 4\pi r^2$$

$$I(r) = \frac{\gamma P_0}{2} A^2(r) kw$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma P_0}{2} A^2(r_0) kw 4\pi r_0^2 = \frac{\gamma P_0}{2} A^2(r) kw 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow A^2(r_0) r_0^2 = A^2(r) r^2$$

$$A(r) = A(r_0) \frac{r_0}{r}$$

$$\Rightarrow \Psi(r, t) = A(r_0) \frac{r_0}{r} \cos(kr \pm \omega t)$$

(Per $r=0$, l'~~intensità~~^{ampiezza} diventerebbe infinita. Ma in natura non esiste una sorgente davvero puntiforme. Seppur piccolo, ha sempre un raggio. Una sorgente puntiforme è un'astrazione).

L'intensità del suono diventa quindi

$$I = \frac{\gamma P_0}{2} kw A^2(r_0) \frac{r_0^2}{r^2}$$

Questo tipo di attenuazione si chiama **ATTENUAZIONE GEOMETRICA**.

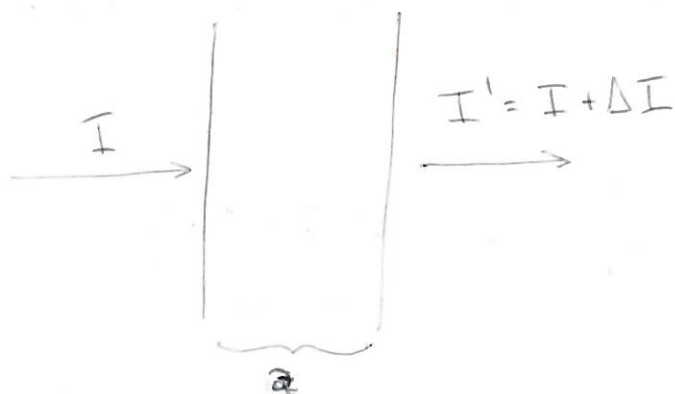
Esiste però anche un altro tipo di attenuazione, ~~una~~ **perdita di energia** causata dalla **cessione di energia al mezzo** (per esempio scaldandolo).

Questa si chiama **ATTENUAZIONE DISSIPATIVA**, ed è data dalla **legge di Lambert-Beer**.

Suppongo di avere un'onda piana (che quindi non presenta attenuazione geometrica) di **intensità** I .

Arriva contro un materiale di **spessore** z .

Come sarà cambiata l'intensità dell'onda dopo essere passata attraverso il materiale?



Se viene dissipata energia, $\Delta I < 0$
Considero uno strato di spessore infinitesimo Δz

Mi aspetto che I sia:

- **direttamente proporzionale** $z - \Delta z$
- **direttamente proporzionale** z I (più arriva energia, più ne verrà dissipata)

$$\Rightarrow \Delta I = -\alpha I \Delta z$$

dove α = coefficiente di assorbimento del materiale

$$\Rightarrow \frac{dI}{I} = -\alpha dz \quad \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE I ORDINE}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{I} dI = - \int \alpha dz$$

$$\Rightarrow \boxed{I(z) = I(0) e^{-\alpha z}}$$

dove $I(0) = I(z=0)$
= INTENSITA' INCIDENTE

E' una legge generale, che non vale solo per le onde sonore.

~~tenendo~~ Tenendo conto di tutte le attenuazioni, quindi,

$$\boxed{I(r) = I(r_0) \frac{r_0}{r} e^{-\alpha(r-r_0)}}$$

Questa equazione e' consistente perche' se la valuto in r_0 arrivo'

$$I(r_0) = I(r_0)$$

~~Adesso~~ Adesso possiamo scrivere l'equazione completa delle onde sferiche

$$\boxed{\Psi(r,t) = A(r_0) \frac{r_0}{r} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_0)} \cos(kr - \omega t)}$$

Può succedere che, anche con sorgente sferica, l'onda non sia emessa in tutte le direzioni, ma venga emessa entro un certo **ANGolo SOLIDO**

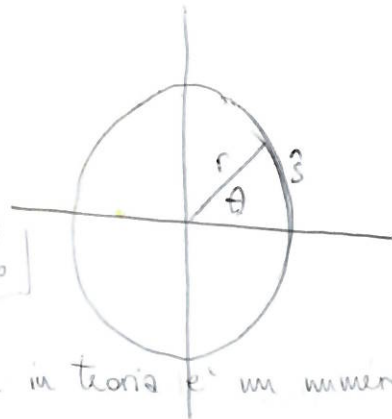
Piccola digressione sull'angolo solido:

• 2 dimensioni: ho una circonferenza.

Prendo un angolo sulla circonferenza e lo esprimo come rapporto tra l'arco individuato dall'angolo e il raggio della circonferenza

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Si misura in radianti (anche se in teoria è un numero puro)

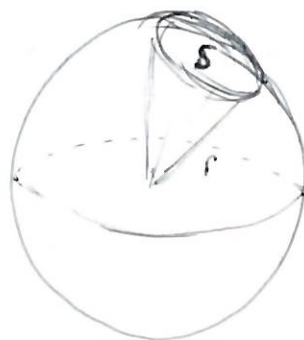


• 3 dimensioni: ho una sfera.

Definisco l'angolo solido come il rapporto tra la **superficie** individuata dall'angolo solido e il **quadrato del raggio** della circonferenza

$$\Sigma = \frac{S}{r^2}$$

Si misura in steradiani (idem con patate)



Sfera completa: $\Sigma = 4\pi$

Meta sfera: $\Sigma = 2\pi$

Quarto di sfera: $\Sigma = \pi$

FONOMETRIA: IL SUONO È L' UOMO

La fonometria si occupa della **percezione** delle onde acustiche da parte dell' orecchio umano.

Grazie al fatto di possedere **due** orecchie, possiamo capire **da dove** vengono i suoni.

Range di **frequenze** udibili dall' orecchio umano:

$$20 \text{ Hz} < \nu < 20 \text{ kHz}$$

(variazione di un fattore di 10^3)

Range di **intensità** udibili dall' orecchio umano:

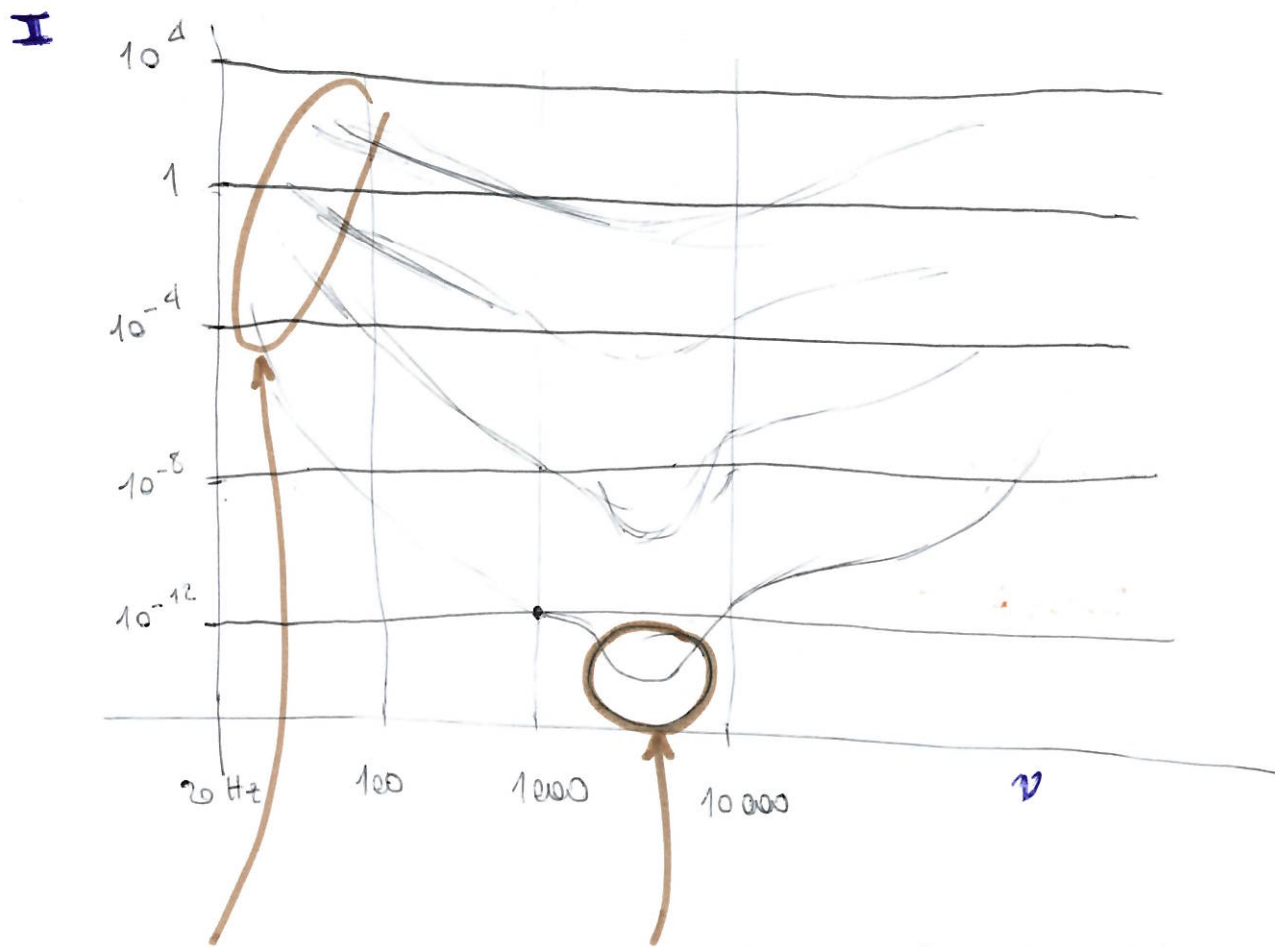
$$I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} < I < 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Intensità per frequenze dell' ordine di 1 kHz

I_0 si chiama **soglia di udibilità**.

In realtà non esiste un vero limite sopra il quale si smette di sentire, ma esiste una **soglia del dolore** ($1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$) al di sopra della quale l' orecchio viene danneggiato.

Curve isofoniche: descrivono in che modo i suoni vengono percepiti allo stesso "volume" al variare della loro ν e I



le curve tendono ad **appiattirsi**: per questo alzando il volume sentiamo meglio i bassi

regione **piatto mancato**:

sentiamo bene anche a intensità molto basse

Si utilizza una **scala logaritmica**: infatti la sensibilità dell'orecchio non è lineare, ma logaritmica (in base 10).

Se raddoppio l'intensità di un suono, praticamente non me ne accorgo. Se decuplico l'intensità di un suono, lo sento circa raddoppiato di volume.



Per questo motivo, usare $\frac{W}{m^3}$ come unità di misura non è molto agevole.

Introduco quindi una nuova grandezza: il **livello sonoro**.

Esso si basa su una **scala logaritmica** e prende come riferimento I_0 (soglia dell'udibilità)

$$B = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

LIVELLO SONORO

Sarebbe una grandezza adimensionale, ma per ricordarci che parliamo di intensità aggiungiamo l'unità di misura dei **decibel (dB)**

Ad esempio, $80 \text{ dB} = 10^{-4} \frac{W}{m^2}$. Suono forte ma comunque lontano dalla soglia del dolore.

Se invece volessimo basarci non sulla soglia di udibilità I_0 ma su un'altra intensità nota I_1 , possiamo usare la seguente grandezza

$$A = 10 \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

Se $A < 0 \Rightarrow I_2 < I_1$: **ATTENUAZIONE**

$A > 0 \Rightarrow I_2 > I_1$: fenomeno di **AMPLIFICAZIONE**

(non è possibile crearlo spontaneamente, a meno di creare un'onda (7))

convergente)

Possiamo esplicitare l'attenuazione anche tramite il rapporto tra A e r $\left(\frac{A}{r}\right)$. Si misura in $\frac{dB}{km}$.

In questo caso $A = 10 \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1}\right)$ e r è la distanza tra il punto 2 e il punto 1:

$$r = r_2 - r_1 = (r_2 - r_0) - (r_1 - r_0)$$

Qual è la relazione tra $\frac{A}{r}$ e α ?
Tenendo conto solo dell'attenuazione dissipativa (onde piane)
 $A = 10 \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10 \log_{10} \left(\frac{I(r_2)}{I(r_1)}\right) = 10 \log_{10} \frac{e^{-\alpha(r_2 - r_0)}}{e^{-\alpha(r_1 - r_0)}} =$
 $= 10 \log_{10} e^{-\alpha(r_2 - r_1)} = 10 \log_{10} e^{-\alpha r}$

$$\Rightarrow \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1}\right) = \log_{10} e^{-\alpha r} = -\alpha r \log_{10} e$$

$$\Rightarrow A = -\alpha r 10 \log_{10} e \Rightarrow \frac{A}{r} = -\alpha 10 \log_{10} e$$

Tenendo conto anche dell'attenuazione geometrica (onde sferiche)

$$A = 10 \log_{10} \left(\frac{I(r_2)}{I(r_1)}\right) = 10 \log_{10} \left(\frac{\cancel{I(r_0)} \frac{r_0^2}{r_2^2} e^{-\alpha(r_2 - r_0)}}{\cancel{I(r_0)} \frac{r_0^2}{r_1^2} e^{-\alpha(r_1 - r_0)}}\right) =$$

$$= 10 \log_{10} \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} e^{-\alpha(r_2-r_1)} \right) =$$

$$= \underbrace{10 \log_{10} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2}_{\text{geometrica}} + \underbrace{10 \log_{10} e^{-\alpha(r_2-r_1)}}_{\text{dissipativa}}$$

EFFETTO DOPPLER

Il suono si propaga in un sistema di riferimento privilegiato: quello dell'aria. Quindi è diverso il caso dell'ascoltatore fermo e sorgente in movimento da quello di sorgente ferma e ascoltatore in movimento.

In ogni caso, se ascoltatore e sorgente si stanno **avvicinando** l'onda risulta "schiacciata" (frequenza **più alta**) e viceversa

Sorgente in movimento



$$\lambda_B = \lambda_A \pm v_A T_A = \lambda_A \pm \frac{v_A}{f_A}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{\text{suono}}}{v_B} = \frac{v_{\text{suono}}}{v_A} \pm \frac{v_A}{v_A} = \frac{v_{\text{suono}} \pm v_A}{v_A}$$

\Rightarrow

$$v_B = \frac{v_{\text{suono}}}{v_{\text{suono}} \pm v_A} v_A$$

segno - se si avvicina
segno + se si allontana

Ascoltatore in movimento



Trasformazioni di Galileo: $v_s' = v_s \pm v_B$

$$\Rightarrow \lambda v_B = v_{suono} \pm v_B = \lambda v_A \pm v_B$$

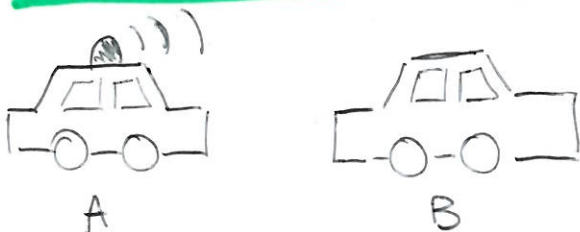
Divido tutto per λv_A

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{1 \pm \frac{v_B}{v_{suono}}}{\frac{v_{suono}}{v_A}} = \frac{v_s \pm v_B}{v_s}$$

$$\Rightarrow v_B = \frac{v_{suono} \pm v_B}{v_{suono}} v_A$$

+ se si avvicina
- se si allontana

Entrambi si muovono



$$v_{mezzo} = \frac{v_s}{v_s \pm v_A} v_A$$

$$v_B = \frac{v_s \mp v_B}{v_s} v_{mezzo}$$

$$\Rightarrow v_B = \frac{v_s \mp v_B}{v_s \pm v_A}$$

CENNI ANALISI DI FOURIER : studio di onde non armoniche

Corda lunga L fissata ai due estremi.



Una perturbazione qualsiasi si può scrivere come **Somma infinita di modi normali**, "pesati" dai loro coefficienti di ampiezza

$$\Psi(z,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Psi_n(z,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nk_1 z) \cos(n\omega_1 t + \varphi)$$

Come ricaviamo gli A_n ?

Per prima cosa **definiamo un prodotto scalare** tra due funzioni \langle , \rangle , definito così:

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) g(z) dz$$

Adesso dimostro che $A_n = \langle \Psi(z,0), \sin(nk_1 z) \rangle$

dove $\Psi(z,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nk_1 z)$

Dimostrazione:

$$\langle \Psi(x,0), \sin(nk_1x) \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L \Psi(x,0) \sin(nk_1x) dx =$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \sin(mk_1x) \sin(nk_1x) dx =$$

$$= \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \int_0^L \sin(mk_1x) \sin(nk_1x) dx =$$

Formule di Werner: $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

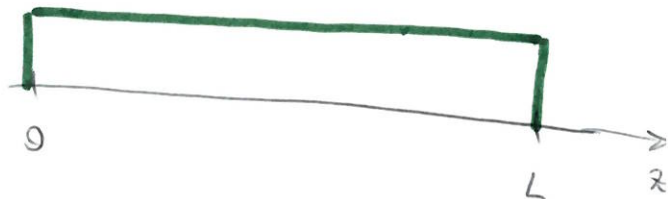
$$= \frac{1}{L} \sum_m A_m \int_0^L \cos((m-n)k_1x) - \cos((m+n)k_1x) dx =$$

$$= \frac{2}{L} \left[\sum_m A_m \int_0^L \frac{1}{2} \cos((m-n)k_1x) dx - \int_0^L \frac{1}{2} \cos((m+n)k_1x) dx \right]$$

Per simmetria delle funzioni, $= \frac{2}{L} \cdot \frac{L}{2} A_n = A_n$

Esempio 1

Studiamo una **semionda quadrata**



Equazione: $\psi(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < L \\ 0 & x=0, x=L \end{cases}$

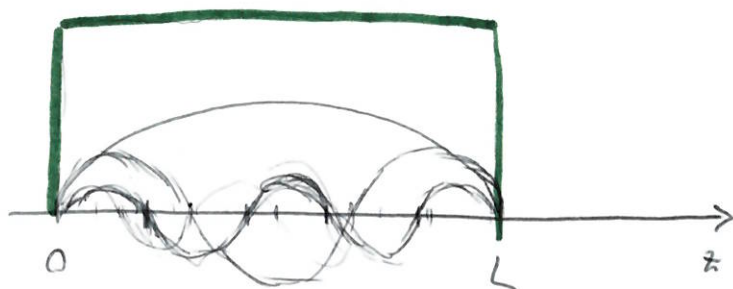
$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(nk_1 x) dx = -\frac{2}{L} \cdot \frac{1}{nk_1} \left[\cos(nk_1 x) \right]_0^L$$

$k_1 = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$

$$= -\frac{2}{L} \cdot \frac{L}{\pi n} \left[\cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \right]_0^L =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left[\cos(n\pi) - 1 \right] = -\frac{2}{\pi n} \left[(-1)^n - 1 \right] = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

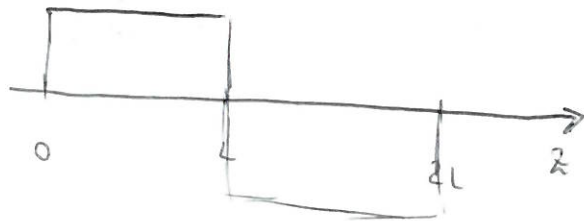
In pratica, ~~non~~ vengono sommate le onde con n dispari



Jolly 3

Esempio 2

Studiamo un'onda quadrata



Equazione
$$\Psi(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq L \\ -1 & L < x \leq 2L \end{cases}$$

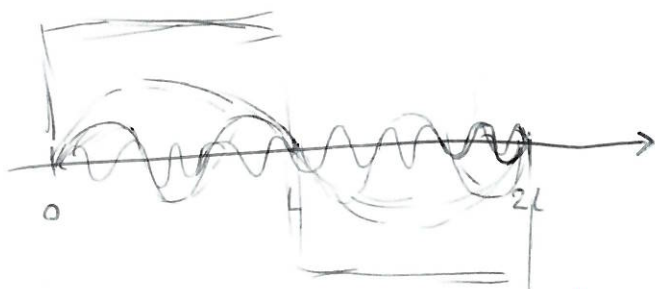
$$A_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} \Psi(x,0) \sin(nk_1 x) dx =$$

$$= \frac{1}{L} \left[\int_0^L \sin(nk_1 x) dx - \int_L^{2L} \sin(nk_1 x) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{L} \left[-\frac{1}{nk_1} \cos\left(\frac{\pi}{2L} nk_1 x\right) \right]_0^L + \frac{1}{L} \left[\frac{1}{nk_1} \cos(nk_1 x) \right]_L^{2L} =$$

$$= -\frac{1}{L} \frac{2L}{n\pi} \left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right] + \frac{1}{L} \frac{2L}{n\pi} \left[\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[(-1)^n - 0 + 0 - 1 \right] = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$



Jolly 4

⇒ un'onda su una corda vincolata che segue l'eq. di D'Alembert
e' una sovrapposizione di ONDE STAZIONARIE ARMONICHE

Poiché sappiamo che un'eq. $\Psi(x,t)$ che risolve l'equazione di D'Alembert è nella forma $\Psi^*(x \pm vt)$, cerchiamo di mettere anche l'eq. delle onde stazionarie in questa forma

$$\Psi(x,t) = \sum_n A_n \cdot \sin(nk_1 x) \cdot \cos(n\omega_1 t) =$$

FORMULE DI WERNER: $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

$$= \sum_n A_n \cdot \frac{1}{2} [\sin(nk_1 x - n\omega_1 t) + \sin(nk_1 x + n\omega_1 t)] =$$
$$= \sum_n A_n \cdot \frac{1}{2} [\sin(nk_1 (x - vt)) + \sin(nk_1 (x + vt))]$$

Che è nella forma $\Psi(x,t) = \Psi_+^*(x + vt) + \Psi_-^*(x - vt)$
cioè la soluzione più semplice dell'eq. di D'Alembert

Jelly 5

OTTICA

Lungo percorso per capire la natura della radiazione luminosa.

Newton osserva la scomposizione della luce nel prisma. Il rosso viene deviato di meno \Rightarrow pensa che le particelle di luce rossa ~~sono~~ abbiano **massa maggiore** di quelle di luce blu

Nel **1807**, **Young** fa l'esperimento della **doppia fenditura** e osserva ~~sta~~ ~~radio~~ figura di diffrazione

Nel **1817** l'accademia delle scienze francese indice un concorso per spiegare la natura della luce.

Fresnel propone che la luce sia un'onda. Poisson (teorico molto bravo) lo smonta con il ragionamento.

Ma il presidente della commissione, **Arago**, sperimentale molto brillante, dà ragione a Fresnel con un esperimento, e quest'ultimo vince il concorso

Maxwell nel **1865** scrive le sue equazioni sui campi elettromagnetici. Combinando le equazioni, posso scrivere una **equazione di D'Alembert**

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 E}$$

Soluzioni:

$$\begin{cases} E = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t) & \text{PIANA} \\ E = E_0(r) \frac{e_0}{r} \cos(kr - \omega t) & \text{SFE = RICA} \end{cases}$$

Da qui si deduce che la luce è un'onda elettromagnetica, con velocità $v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$

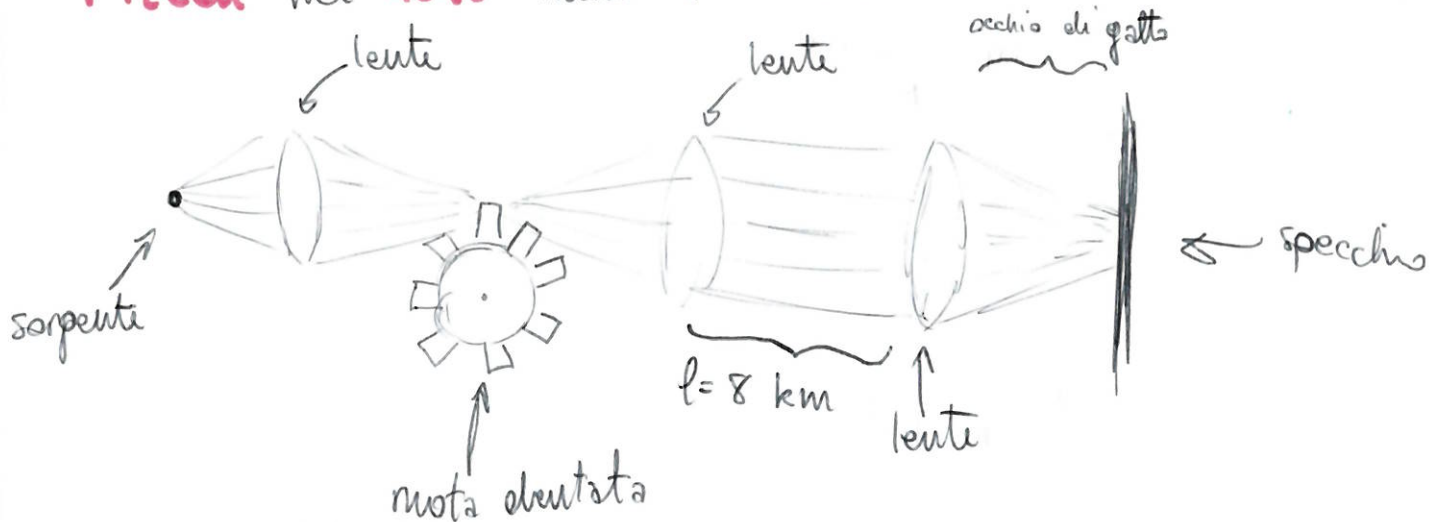
Inizio '900: arrivano **Planck** e **Einstein** che, attemando moltissimo la luce, rilevano **quantità discrete** di energia \Rightarrow **DUALITÀ ONDA-CORPUSCOLO**: luce come pacchetti di energia (fotoni)

Come viene calcolata la **velocità della luce?**

Galileo fa l'esperimento della **lanterna**: Galileo e assistent molto lontani, tengono in mano due lanterne coperte. Assistente scopre la lanterna, Galileo scopre la sua quando vede la luce. ☹

Ma esperimento **inconcludente**: Galileo conclude solo che la luce è molto veloce, molto di + che il tempo di riflesso umano.

Fizeau nel **1849** riuscì a misurare la velocità della luce



La serpente genera lampi di luce, si può regolare la velocità della ruota dentata. L'occhio di gatto riflette la luce sullo stesso percorso

Regola la velocità in modo che la luce di ritorno non passi mai dalla ruota dentata.

Calcolando la velocità angolare della ruota, Fizeau deduce la velocità della luce.

VELOCITÀ DELLA LUCE NEL VUOTO: $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s

PASSAGGIO RADIAZIONE DA UN MEZZO ALL'ALTRO

Abbiamo già studiato questo fenomeno in **una dimensione** (corda vibrante) e abbiamo visto che nel passaggio da un mezzo all'altro cambia la **velocità** della radiazione.

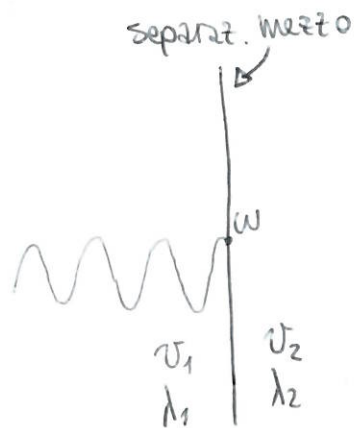
Questo succede anche in **tre dimensioni**.

c = velocità della luce nel vuoto

v = velocità della luce nel mezzo

Chiamo $n = \frac{c}{v}$ l' **indice di rifrazione del mezzo**

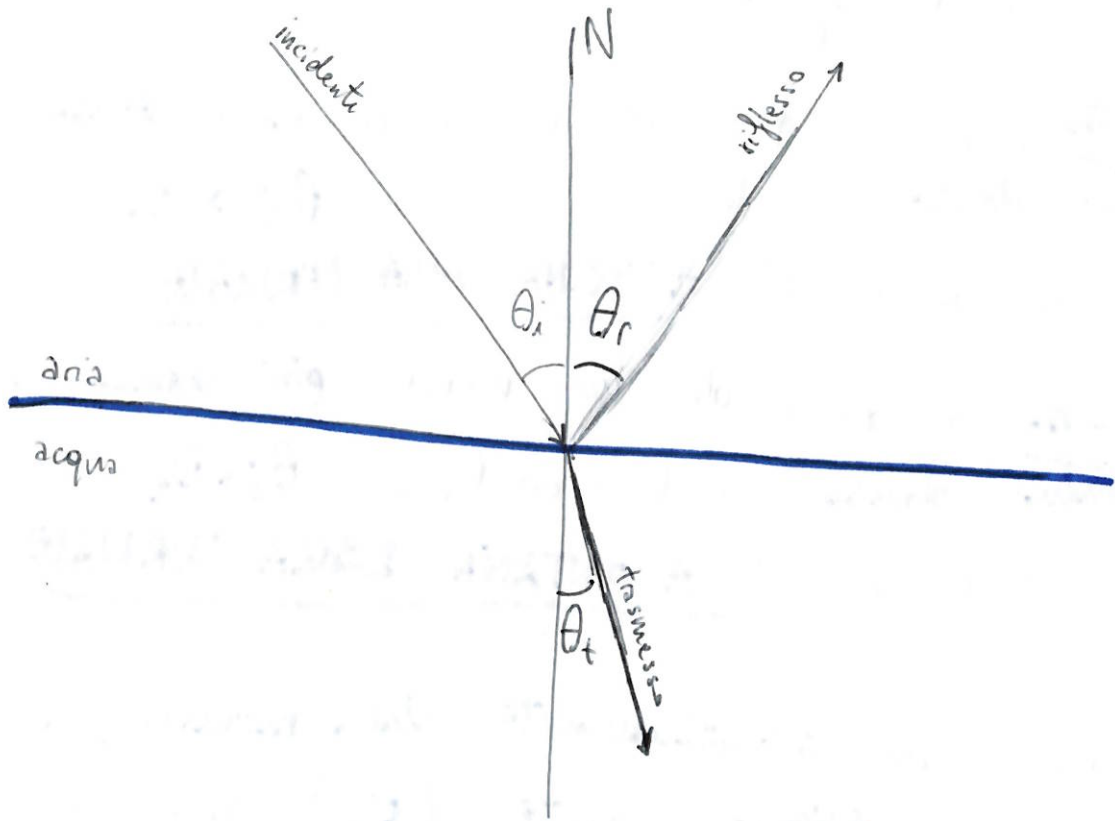
Poiché $c \geq v$, $n \geq 1$



Il II mezzo viene messo in oscillazione dall'onda che arriva
 \Rightarrow si mette a oscillare con la **stessa ω** .

Ma **v cambia $\Rightarrow \lambda$ cambia**

Il caso più semplice da studiare è il passaggio da aria a acqua



Il raggio incidente si divide in raggio trasmesso e riflesso, che giacciono tutti e tre sullo stesso piano, il quale contiene anche la retta normale alla superficie.

Scrivo gli angoli dei raggi rispetto alla normale.

Troviamo la relazione fra i tre angoli.

Sappiamo che la riflessione è speculare, quindi

$$\theta_r = \theta_i$$

L'altra relazione, tra θ_i e θ_t , ce la dà la legge di

Snell - Cartesio : $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$

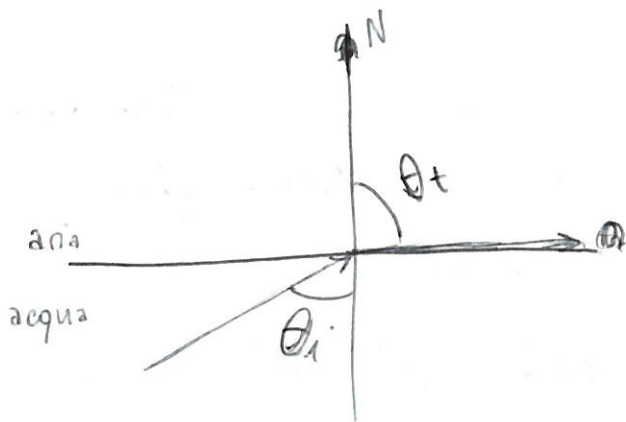
Entrambi i θ sono compresi tra 0 e $\frac{\pi}{2}$: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Poiché $\sin \theta_i = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_t$, se:

• $\frac{n_2 > n_1}{\text{più denso}}$, quindi si passa da un mezzo meno denso a uno più denso, $\sin \theta_i > \sin \theta_t \Rightarrow \theta_i > \theta_t$
 \Rightarrow il raggio si AVVICINA ALLA NORMALE

• $\frac{n_2 < n_1}{\text{meno denso}}$, si passa da un mezzo più denso a uno meno denso, $\sin \theta_i < \sin \theta_t \Rightarrow \theta_i < \theta_t$
 \Rightarrow il raggio si AVVANTANA DALLA NORMALE

Nel caso di allontanamento della normale, arrivo a un $\theta_t = \frac{\pi}{2}$, θ_i , chiamato ANGOLO LIMITE (θ_L) tale che



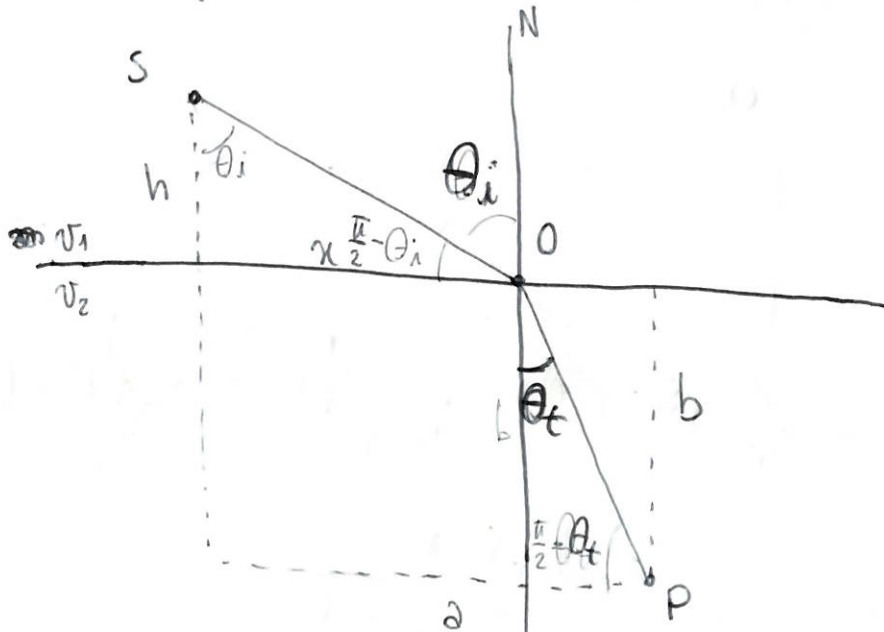
$$n_1 \sin \theta_L = n_2 \Rightarrow \sin \theta_L = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \theta_L = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Se $\theta_i > \theta_L$, non c'è più rifrazione, ma solo riflessione: la radiazione rimane tutta nel primo mezzo e avviene il fenomeno di riflessione totale interna.

La legge di Snell si può dimostrare grazie al principio di Fermat.

Esso dice che la luce, per propagare, sceglie il percorso con il Tempo di percorrenza minore.

Dimostrazione legge di Snell : rifrazione



$$\Delta t = \frac{\overline{SO}}{v_1} + \frac{\overline{OP}}{v_2} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{v_2}$$

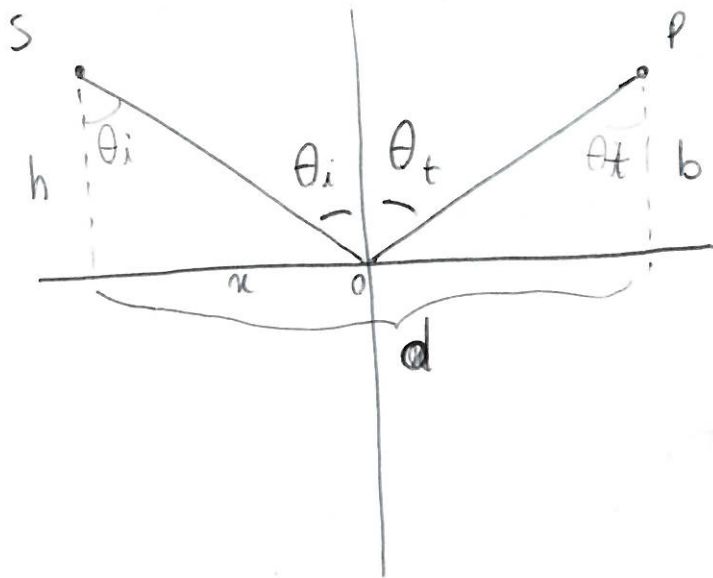
Vogliamo che il tempo sia **minimo** $\implies \frac{dt}{dx} = 0$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{h^2 + x^2} \cdot v_1} + \frac{-2(a-x)}{2\sqrt{b^2 + (a-x)^2} \cdot v_2} = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0$$

$$\implies \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}} \implies \frac{1}{v_1} \cdot \sin \theta_i = \frac{1}{v_2} \sin \theta_t$$

$$\implies \frac{c \sin \theta_i}{v_1} = \frac{c \sin \theta_t}{v_2} \implies n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Dimostrazione legge di Snell: riflessione



$$\Delta t = \frac{\overline{SO}}{v_1} + \frac{\overline{OP}}{v_1} = \frac{1}{v} (\overline{SO} + \overline{OP}) = \frac{1}{v} \left(\sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \right)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \left(\frac{2x}{2\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{-2(d-x)}{2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \right) = 0$$

$$\frac{1}{v} \left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \right) = \sin \theta_i = \sin \theta_r$$

$$\Rightarrow \theta_i = \theta_r$$

Nel passaggio da un mezzo all'altro valgono le formule che avevamo già visto:

$$r = \frac{E_{or}}{E_{oi}} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$t = \frac{E_{ot}}{E_{oi}} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

Possiamo esprimerle in funzione di n o di v ($n = \frac{k}{k_0} = \frac{c}{v}$)

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$$

Per $n_1 > n_2$ si ha $r > 0 \Rightarrow$ ONDA RIFLESSA IN FASE CON L'ONDA INCIDENTE

Per $n_1 < n_2$ si ha $r < 0 \Rightarrow$ ONDA RIFLESSA SFASATA DI π RISPETTO ALL'ONDA INCIDENTE

FENOMENI ONDULATORI

Un fenomeno ha caratteristiche ondulatorie se risolve l'equazione di D'Alembert.

Poiché essa è lineare e omogenea, gode del principio di **Sovrapposizione**: se **sovrappongo** due onde, ottengo una **nuova onda** grazie al fenomeno dell'**interferenza**.

Interferenza di onde componenti sfasate

Prendo due onde armoniche con la stessa A e la stessa ω ma sfasate

$$\psi_1 = A \cos(kz - \omega t)$$

$$\psi_2 = A \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

Otterrò una **nuova onda**

$$\psi(z,t) = \psi_1 + \psi_2 = A [\cos(kz - \omega t) + \cos(kz - \omega t + \varphi)] =$$

(PROSTAFERESI: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$)

$$= 2A \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(kz - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Possiamo visualizzare questo fenomeno come due onde uguali generate da due sorgenti poste a distanza d



Intensità media della mons onda: $I = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)$
con $I_0 \propto A^2$

Caso 1: onde in fase tra loro

$$\varphi = 0 \Rightarrow I = 4 I_0$$

Ottengo un'onda con ampiezza doppia

Caso 2: onde in controfase

$$\varphi = \pi \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \Rightarrow I = 0$$

~~Questa~~ L'onda si annulla

Potrebbe sembrare che nel primo caso si crei energia dal nulla e che nel secondo caso si distrucca energia, in realtà l'energia si conserva, viene solo redistribuita

Infatti, poiché $\overline{\cos^2} = \frac{1}{2}$, $\overline{I} = 2 I_0$, la somma delle intensità delle due onde.

Onde con stessa fase ma diversa ω

$$\Psi_1 = A \cos(k_1 z - \omega_1 t)$$

$$\Psi_2 = A \cos(k_2 z - \omega_2 t)$$

$$\Psi(z, t) = \Psi_1 + \Psi_2 = A [\cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t)] =$$

$$= 2A \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) =$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} z - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cos\left(\bar{k} z - \bar{\omega} t\right)$$

modulante

portante

Se $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ (le due onde sono molto vicine di frequenza)

ho una **modulazione periodica dell'ampiezza**

Infatti otteno' un' onda con pulsazione $\bar{\omega}$ e con un'intensità

$$I \propto 4A^2 \cos^2\left(\frac{\Delta k}{2} z - \frac{\Delta \omega}{2} t\right)$$



ONDA PORTANTE



ONDA MODULANTE



PRODOTTO

Questo fenomeno si chiama **BATTIMENTO**.

Esso dà luogo a **variazioni periodiche di volume**.

Più le due frequenze sono **vicine**, più è **lenta** la **modulazione**.

Attraverso i battimenti posso **misurare** facilmente la **variazione di frequenza** tra due frequenze molto **vicine**.

$$I_{n, z=0}, \quad I \propto 4A^2 \cos^2 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$$

$$I = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\Delta\omega}{2} t \right)$$

Poiché \cos^2 ha un **periodo di π** ,

$$\frac{\Delta\omega}{2} T = \pi$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi \cdot \Delta\nu}{2} T = \pi \Rightarrow T = \frac{1}{\Delta\nu}$$

Ad esempio, se ho $\nu_1 = 300 \text{ Hz}$
 $\nu_2 = 310 \text{ Hz}$

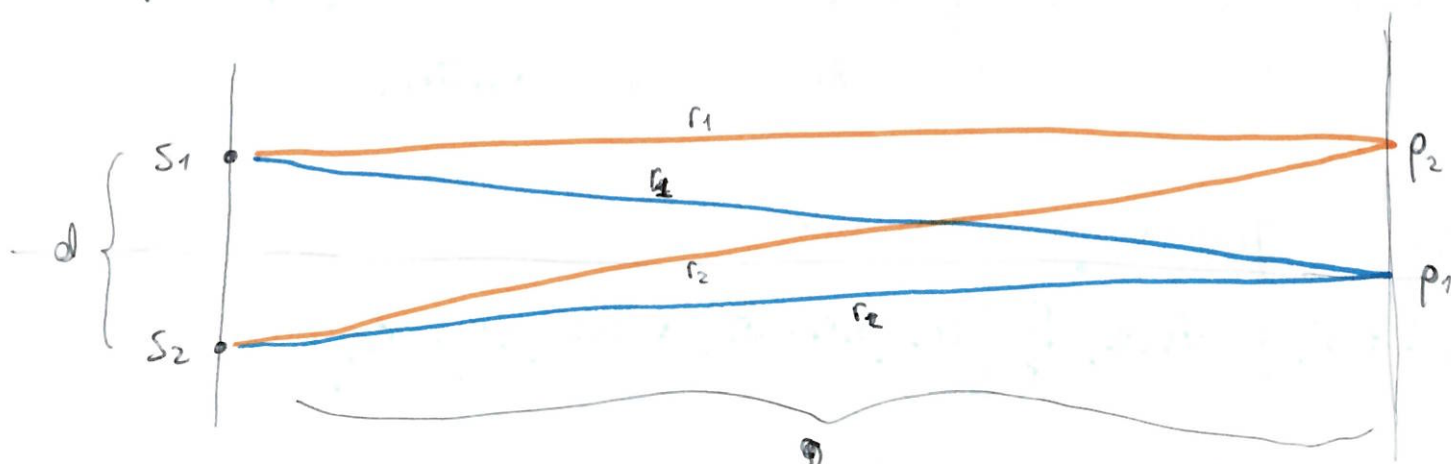
$$\Delta\nu = 10 \text{ Hz} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

$$\nu_B = |\nu_1 - \nu_2|$$

Interferenza di onde sferiche

Più complessa, dipende anche dalla posizione dell'ascoltatore

Sorgenti distanti d che emettono onde sferiche



- le onde arrivano in fase perché devono percorrere lo stesso cammino per arrivare
- le onde arrivano sfasate perché devono percorrere cammini diversi

~~Introduco~~

Introduco approssimazione di CAMPO LONTANO : $r_1, r_2 \gg d$

In questo modo, posso considerare $r_1 \parallel r_2$ ~~Introduco~~

Immagino che r_1 e r_2 si incontrino all'infinito

~~Introduco~~ r_1 e r_2 sono talmente vicini che posso approssimare la distanza dalle sorgenti con la media dei raggi

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Consideriamo due onde armoniche

$$\psi_1 = A(r_0) \frac{r_0}{r} \cos(kr_1 - \omega t)$$

$$\psi_2 = A(r_0) \frac{r_0}{r} \cos(kr_2 - \omega t)$$

C'è una minima differenza di cammino $\Delta r = r_2 - r_1$ che fa sì che le onde arrivino **sfasate**.

Faccio interferire le due onde:

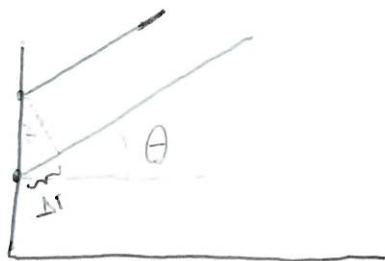
$$\psi_1 + \psi_2 = A(r_0) \frac{r_0}{r} [\cos(kr_1 - \omega t) + \cos(kr_2 - \omega t)] =$$

$$= 2A(r_0) \frac{r_0}{r} \cos\left(\frac{k \Delta r}{2}\right) \cos\left(\frac{k \bar{r}}{2} - \omega t\right) = (\text{PROSTATERES I})$$

$$= 2A(r_0) \frac{r_0}{r} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{k \bar{r}}{2} - \omega t\right) \quad \text{dove } \boxed{k \Delta r = \phi} \quad \text{SFASAMENTO TRA LE DUE ONDE}$$

Posso scrivere la differenza di cammino Δr come:

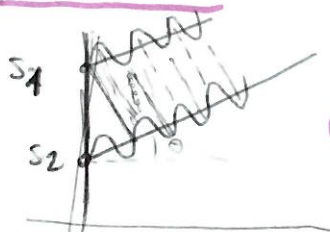
$$\Delta r = d \sin \theta$$



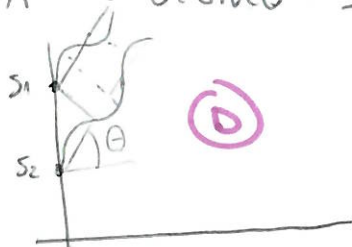
In ogni punto del campo lontano, l'interferenza dipende dall'angolo θ

COSTRUTTIVA: $\Delta r = n\lambda \Rightarrow d \sin \theta = n\lambda \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{n\lambda}{d}\right)$

DISTRUTTIVA: $\Delta r = \frac{2n+1}{2} \lambda \Rightarrow d \sin \theta = \frac{2n+1}{2} \lambda \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{(2n+1)\lambda}{2d}\right)$



(c)



(d)

$$\text{INTENSITA': } I = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{k \Delta r}{2} \right) = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{k d \sin \theta}{2} \right)$$

Chiamo δ lo **sfasamento** associato a due sorgenti a distanza d in direzione θ

$$\delta = \frac{k d \sin \theta}{2}$$

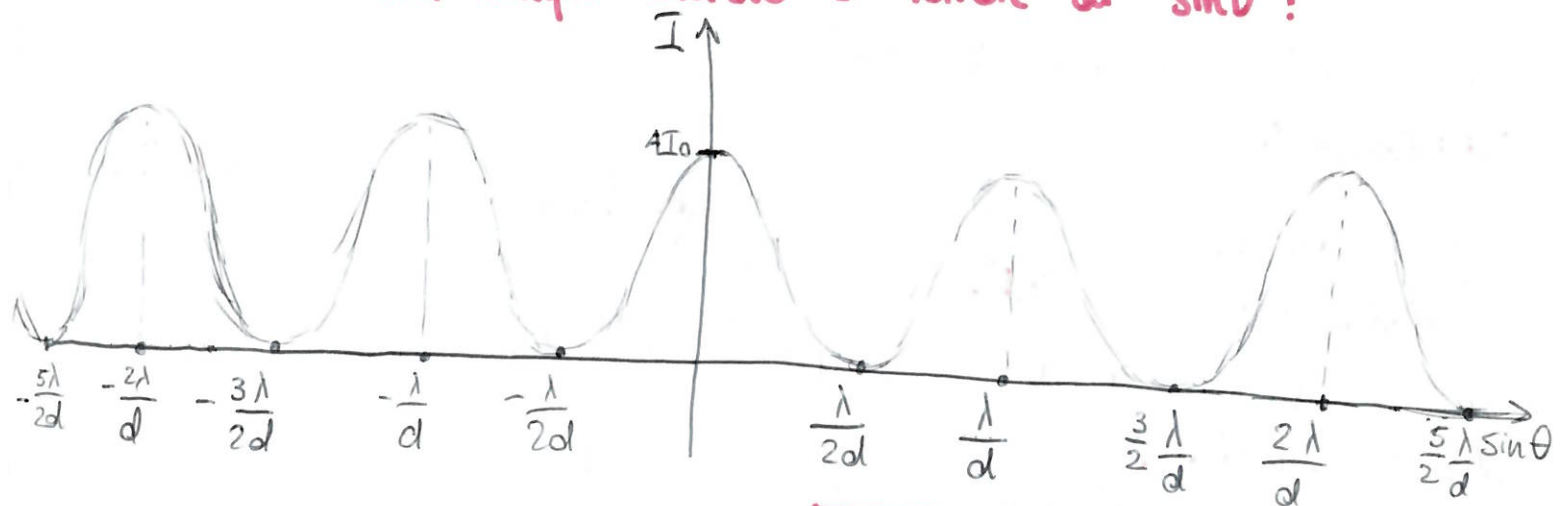
$$\Rightarrow I = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)$$

\Rightarrow anche l'intensità cambia a seconda dell'angolo: ho i **massimi di intensità** quando $\delta = n\pi \Rightarrow \delta = n\pi$

$$\Rightarrow \frac{k d \sin \theta}{2} = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi \Delta r}{2\lambda} = n\pi \Rightarrow \Delta r = n\lambda$$

(come avevamo già detto prima)

Intensità nel campo lontano al variare di $\sin \theta$:



Poiché $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, allora

$$\boxed{-1 < \sin \theta < 1}$$

Quindi, se $\frac{\lambda}{d} > 1$, non potrei vedere un altro massimo oltre a quello centrale. Perché sarebbe ad angoli troppo grandi.

Per poter vedere ~~un~~ almeno un altro massimo rispetto a quello centrale, deve porre $\lambda < d$

Per poter vedere molti massimi e minimi, deve porre $\lambda \ll d$

Se $\lambda > 2d$ non vedo neanche un minimo.

Principio di Huygens-Fresnel: fa capire come si propagano

le onde in generale:

"Ogni punto di un fronte d'onda si comporta a sua volta come sorgente secondaria di onde sferiche con stessa v della primaria."

In questo modo, la forma con cui evolve il fronte d'onda originario è data dalla sovrapposizione dei singoli fronti d'onda secondari.

Con questo principio si può spiegare il fenomeno della DIFFRAZIONE.

Onda piana passa attraverso un' apertura: il suo fronte d'onda diventa CURVO.

Se l'apertura è molto + piccola di λ , il fronte d'onda diventa sferico.

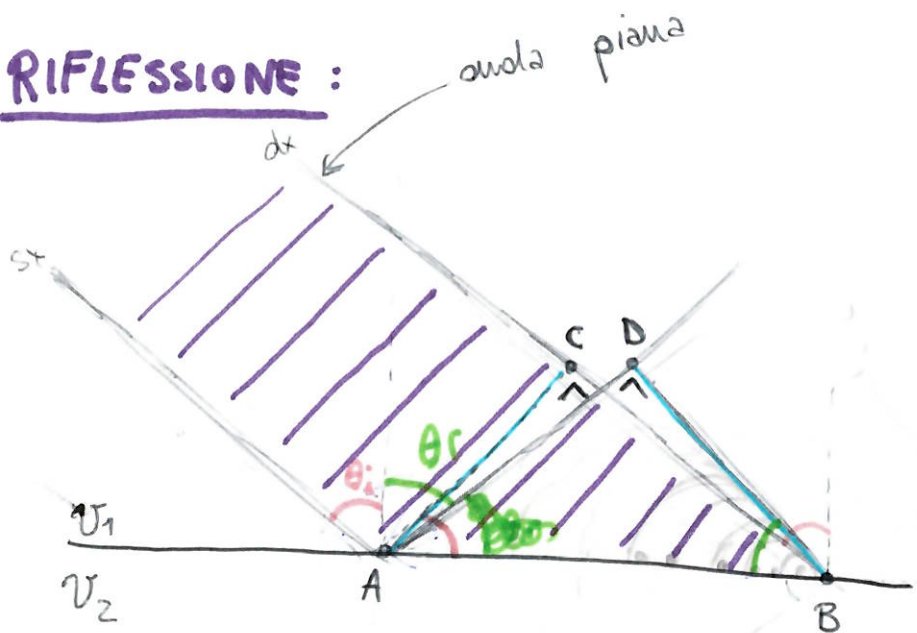
Se l'apertura è molto + grande di λ , il fronte d'onda è quasi piano al centro, incurvato ai bordi.

Questo perché ogni punto nella fessura genera una piccola sorgente sferica, che fa sì che l'onda si propaghi non solo in avanti, ma anche ai lati.



Possiamo dimostrare la riflessione e la rifrazione anche con il principio di Huygens-Fresnel.

RIFLESSIONE :



L'onda incontra la superficie di separazione per prima nel punto A, poi in tutti i punti intermedi e poi nel punto B.

Quando la parte sx dell'onda arriva nel punto A, la parte dx dell'onda si trova nel punto C ($\hat{A}CB$ retto).

Nel tempo in cui la parte dx dell'onda raggiunge il punto B, la parte sx si riflette e arriva in un punto che chiamiamo D.

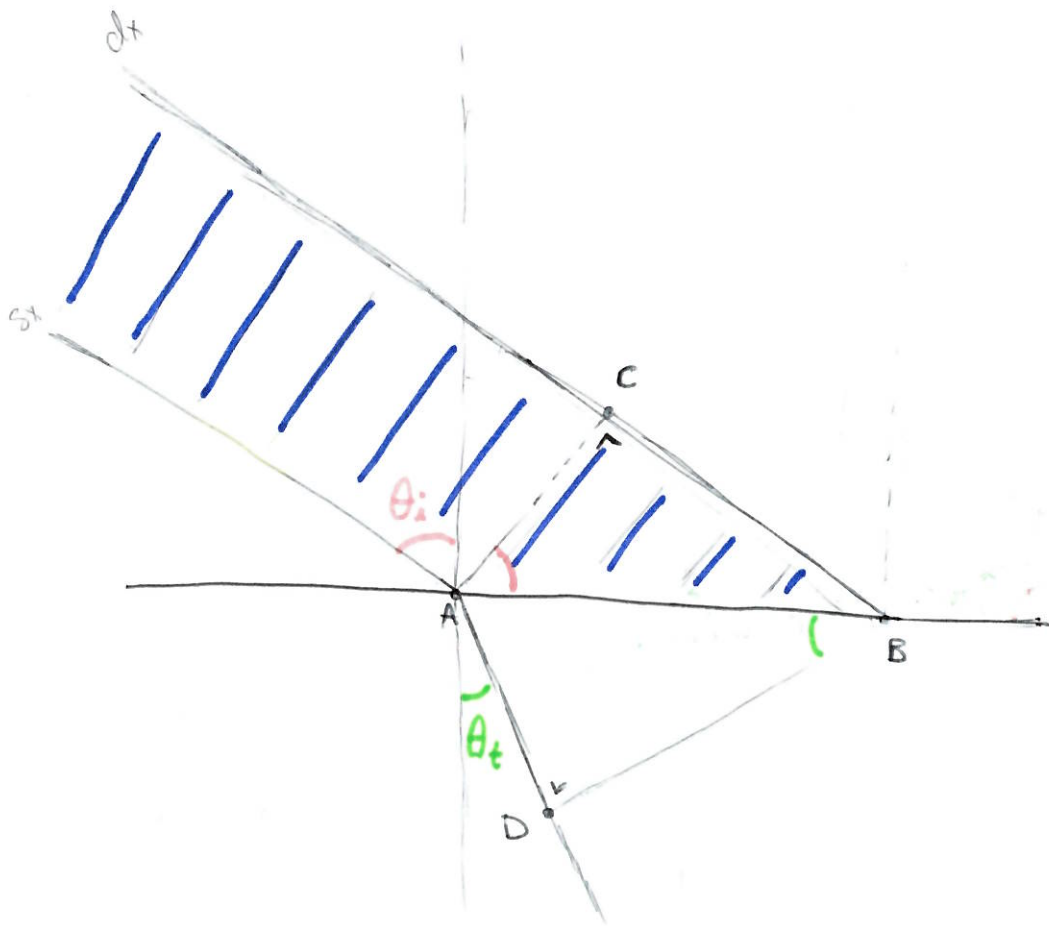
$$\Rightarrow t = \frac{\overline{CB}}{v_1} = \frac{\overline{AD}}{v_1} \Rightarrow \overline{CB} = \overline{AD}$$

\Rightarrow $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$ SIMILI (triangoli rettangoli con due lati in comune)

$$\Rightarrow \frac{CB}{AB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sin \theta_i = \sin \theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r$$

superfluo

RIFRAZIONE



Come prima, mentre a dx l'onda va da C a B, a sx va da A a D

$$t = \frac{CB}{v_1} = \frac{AD}{v_2}$$

li divido entrambi per AB:

$$\frac{1}{v_1} \frac{CB}{AB} = \frac{1}{v_2} \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{1}{v_1} \sin \theta_i = \frac{1}{v_2} \sin \theta_t$$

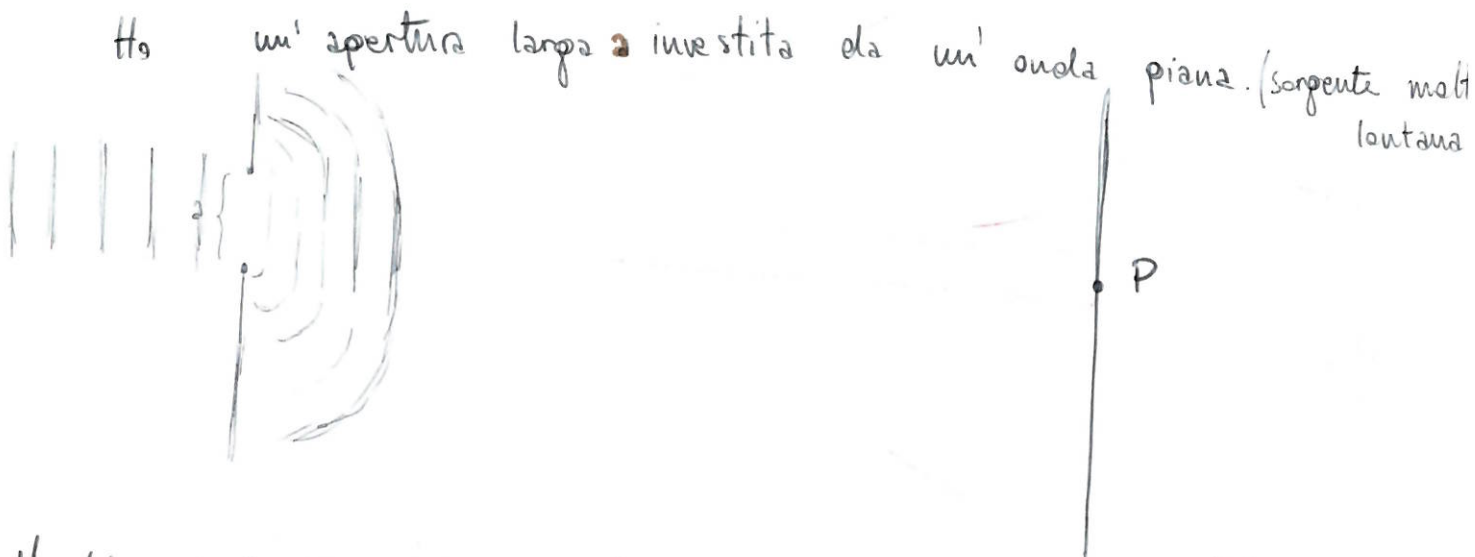
li moltiplico entrambi per c:

~~$$\frac{c}{v_1} \frac{CB}{AB} = \frac{c}{v_2} \frac{AD}{AB}$$~~

$$\frac{c}{v_1} \sin \theta_i = \frac{c}{v_2} \sin \theta_t \Rightarrow n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

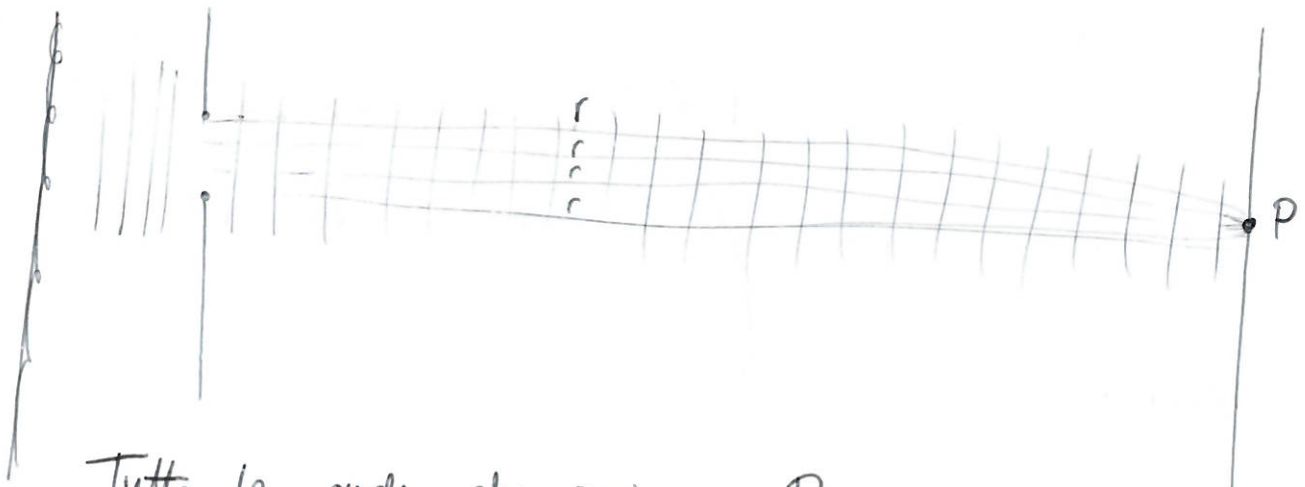
Le leggi di propagazione sono compatibili sia con la formulazione alla **Fermat** (che trattano ~~l'onda~~ la luce come **corpusco**) sia con la formulazione di **Huygens-Fresnel** (che trattano ~~l'onda~~ la luce come **onda**) (87)

STUDIO DIFFRAZIONE



Vogliamo vedere cosa succede in un generico punto P posto nel campo lontano; al variare dell'angolo θ

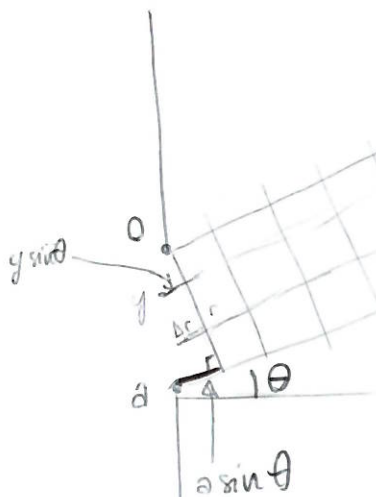
I caso: $\theta = 0$



Tutte le onde che arrivano a P (che sono parallele nell'ipotesi di campo lontano) percorrono uno spazio r

\Rightarrow Si sommano in **fase** \Rightarrow avrò un **massimo** nel punto P

II caso: $\theta \neq 0$



Al variare di y , ogni punto sull'apertura genera un'onda con una **differenza di cammino** dalle altre

Ad esempio, l'onda generata in un generico punto y ha una differenza di cammino da quella generata da $y=0$ di **$y \sin \theta$** , con $0 \leq y \leq a$.

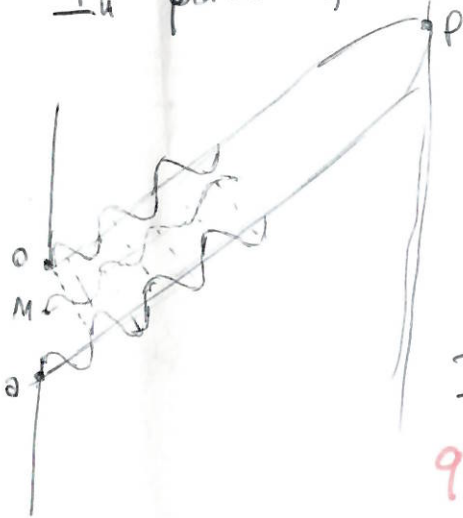
In particolare, se

$a \sin \theta = \lambda$, le onde generate da $y=0$ e $y=a$ sono ~~in fase~~ **in fase**.

Ma questo vuol dire che **$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$** , cioè, l'onda generata nel **punto medio** è sfasata di $\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$ fa **interferenza distruttiva**.

In più, lo sfasamento tra due **punti qualsiasi** distanti $\frac{a}{2}$ e $\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$ tutti i punti **SI ANNULLANO A DUE A DUE**

\Rightarrow avrò un **minimo** nel punto P



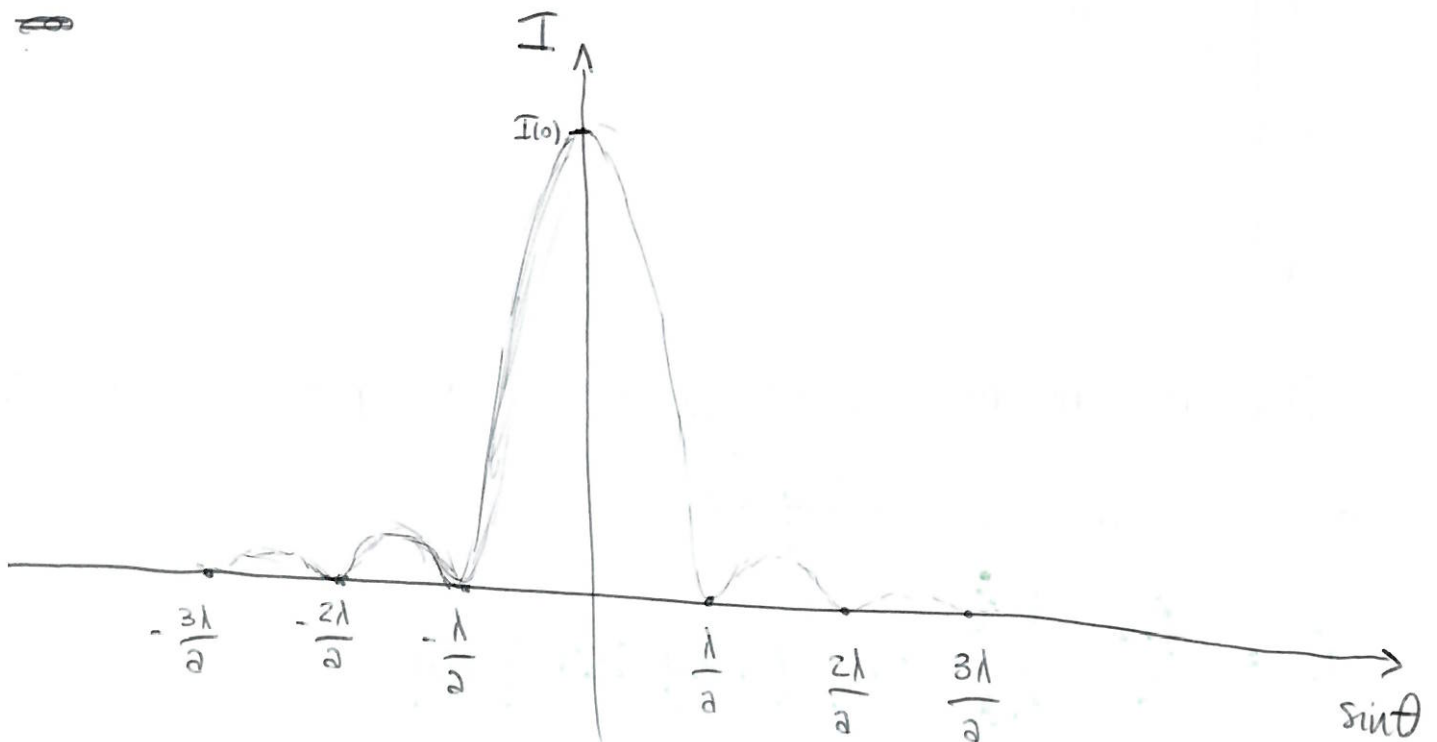
Questo caso può essere generalizzato al caso $a \sin \theta = n \lambda$.

In queste circostanze, lo sfasamento tra due punti distanti

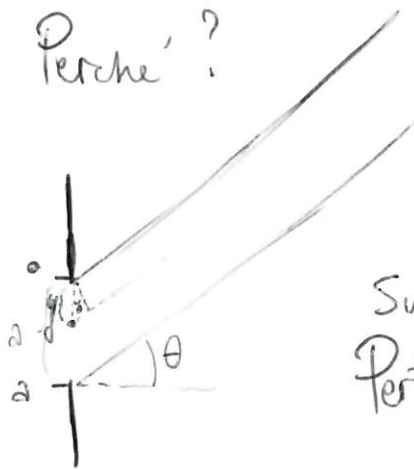
$\frac{a}{2n}$ e $\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$ i punti **SI ANNULLANO A DUE A DUE**

\Rightarrow nel punto P avrò un **minimo**.

Intensità nel campo lontano a variare di $\sin \theta$:



Perché?



Sfasamento della luce dal punto y :

$$\Delta r = y \sin \theta$$

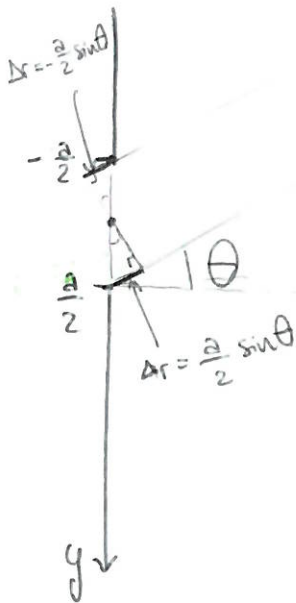
Suddivido l'apertura in varie "strisce" di larghezza dy .

Perturbazione: $dE = E_0 \cos(kr - \omega t + k \Delta r(y)) \frac{dy \cdot \lambda}{a \cdot \lambda}$

$$= E_0 \cos(kr - \omega t + k y \sin \theta) \frac{dy}{a}$$

E è la perturbazione generata da ciascun'onda sferica

Cambiamo punto di riferimento: poiché il problema è perfettamente simmetrico risp. al punto medio, prendiamo come **origine** il punto medio della fenditura



In più ho un **continuo** di ordine: per sommarle tutte dovrò usare un **integrale**

$$E = \frac{E_0}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(\varphi + ky \sin \theta) dy =$$

$$= \frac{E_0}{a} \frac{1}{k \sin \theta} \left[\sin(\varphi + ky \sin \theta) \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{E_0}{a k \sin \theta} \left[\sin\left(\varphi + \frac{ak}{2} \sin \theta\right) - \sin\left(\varphi - \frac{ak}{2} \sin \theta\right) \right] =$$

PROSTAFERESI: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$$= \frac{2E_0}{a k \sin \theta} \cos(\varphi) \sin\left(\frac{ak}{2} \sin \theta\right) =$$

$$= \frac{2E_0}{ka \sin \theta} \sin \left(\frac{ka \sin \theta}{2} \right) \cos (kr - \omega t)$$

\Rightarrow ho un'onda propagante del tipo $\cos(kr - \omega t)$
 con un'ampiezza di $\frac{2E_0}{ka \sin \theta} \sin \left(\frac{ka \sin \theta}{2} \right)$

Chiamo $\alpha = \frac{ka \sin \theta}{2}$

$$\Rightarrow E = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos (kr - \omega t)$$

Intensità: $I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$

Il grafico è esattamente quello che c'è all'inizio

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \text{sinc } \alpha \quad \text{SENO CARDINALE DI } \alpha$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = I_0 \text{sinc}^2(\alpha)$$

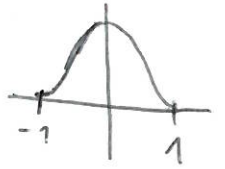
Come avevamo già detto prima, la funzione è nulla
 per $\alpha = m\pi$ con $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Quindi $\frac{ka \sin \theta}{2} = m\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a \sin \theta}{2} = m\pi \Rightarrow a \sin \theta = m\lambda$

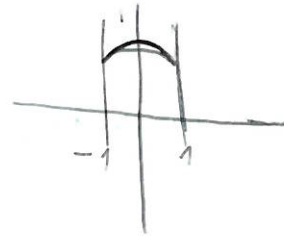
$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{a}$$

Come prima, 'poichè' $-1 < \sin\theta < 1$, allora vedrò tanti massimi e minimi se $\frac{\lambda}{a} \ll 1$

Se $\frac{\lambda}{a} = 1$, vedrò il massimo centrale e due minimi



Se $\frac{\lambda}{a} < 1$, vedrò solo il massimo centrale



la luce verrà dispersa ovunque

Perciò, se ho un'apertura molto grande, per far sì che la radiazione venga dispersa devo avere una λ grande \Rightarrow frequenza bassa

Il punto dei uccelli ha frequenze molto alte \Rightarrow il predatore deve mettersi proprio davanti alla caverna per sentirlo.

I^a noni emessi dai predatori invece sono più gravi \Rightarrow si sparpagliano all'interno della caverna.

Teorema di Babinet: a eccezione del punto centrale, il pattern di diffrazione da una fenditura è uguale al pattern del suo complementare (ostacolo largo a)

Dim

E_f = onda da fenditura E_o = onda da ostacolo

Se $\theta \neq 0$, $E = E_f + E_o = 0$, perché le onde viaggiano in linea retta (ho aperto completamente l'area) Ho sovrapposto le APERTURE \Rightarrow no ostacoli \Rightarrow tutta la luce va in $\theta = 0$

$$\Rightarrow E_f(\theta) = -E_o(\theta)$$

\Rightarrow in $\theta \neq 0$ non c'è luce

Quindi, se $\theta \neq 0$, $I_o = I_f$

ESPERIMENTO DI YOUNG

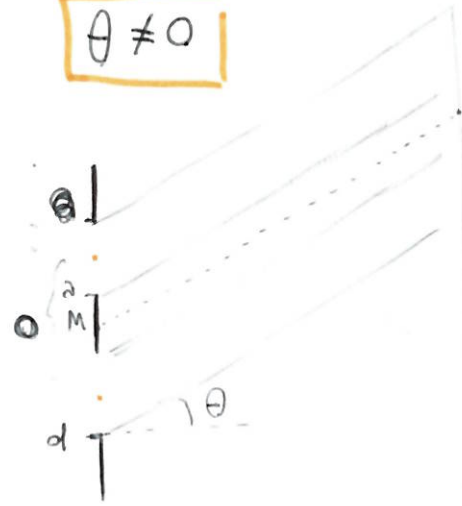
Esperimento di **doppia fenditura** : combinazione di **interferenza** e **diffrazione**

Due fenditure larghe a e a distanza d (distanza tra i punti medi)



Problema **simmetrico** rispetto a $\theta = 0 \Rightarrow$ ho un **max** in $\theta = 0$

$\theta \neq 0$



Problema **simmetrico** rispetto al punto medio tra le due fenditure

$$dE = \frac{E_0}{a} \cos(\varphi + k y \sin \theta) dy$$

$$E = \frac{E_0}{a} \left[\int_{-\frac{d}{2} - \frac{a}{2}}^{-\frac{d}{2} + \frac{a}{2}} \cos(\varphi + k y \sin \theta) dy + \int_{\frac{d}{2} - \frac{a}{2}}^{\frac{d}{2} + \frac{a}{2}} \cos(\varphi + k y \sin \theta) dy \right]$$

Cambio variabile:

$$y' = y + \frac{d}{2}$$

$$y'' = y - \frac{d}{2}$$

$$E = \frac{E_0}{2} \left[\int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \cos \left(\varphi + ky' \sin \theta - \frac{kd}{2} \sin \theta \right) + \cos \left(\varphi + ky'' \sin \theta + \frac{kd}{2} \sin \theta \right) dy \right]$$

y' e y'' hanno lo stesso range di integrazione \Rightarrow posso tagliare gli spici

$$E = \frac{E_0}{2} \left[\int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \cos \left(\varphi_1 + ky \sin \theta \right) + \cos \left(\varphi_2 + ky \sin \theta \right) dy \right]$$

Con $\varphi_1 = \varphi - \frac{kd}{2} \sin \theta$

$$\varphi_2 = \varphi + \frac{kd}{2} \sin \theta$$

~~Poiché le due onde dalle due aperture~~

$$= \cancel{E_0} \left[\text{sinc}(\alpha) \cos \varphi_1 + \text{sinc} \alpha \cos \varphi_2 \right] =$$

Questo ce lo aspettavamo perché le due onde dalle due aperture sono allo stesso angolo \Rightarrow diffrangono allo stesso modo

$$= E_0 \text{sinc}(\alpha) [\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2] =$$

WERNER: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

$$= 2 E_0 \text{sinc}(\alpha) \cos \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)$$

Dove

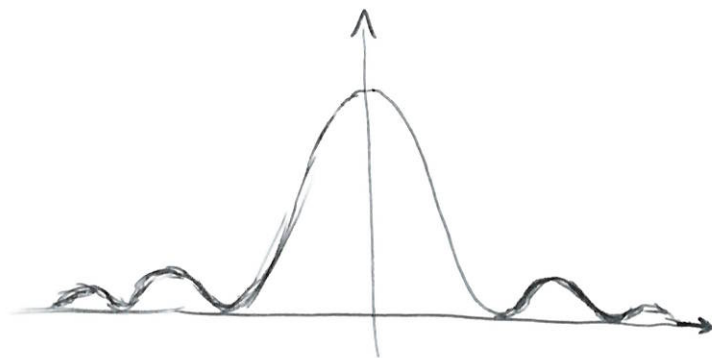
$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi - \frac{kd}{2} \sin\theta + \varphi + \frac{kd}{2} \sin\theta = 2\varphi$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi - \frac{kd}{2} \sin\theta - \varphi - \frac{kd}{2} \sin\theta = -2 \frac{kd}{2} \sin\theta = -2\delta$$

$$\Rightarrow E = \underbrace{2 E_0 \operatorname{sinc}(\alpha)}_{\text{Ampiezza}} \underbrace{\cos(\delta)}_{\text{parte oscillante}} \cos(\varphi)$$

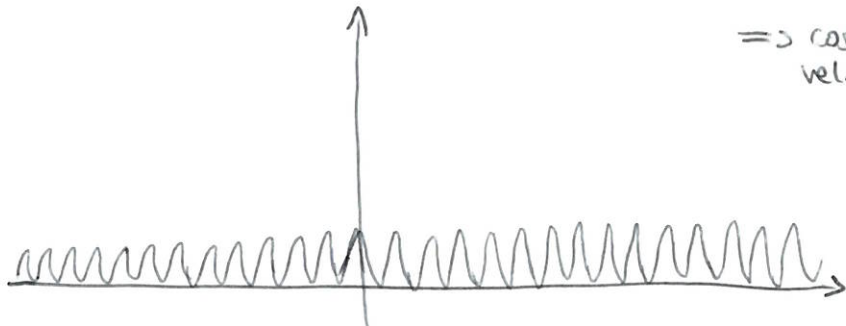
$$\Rightarrow I = I_{(0)} \underbrace{\operatorname{sinc}^2(\alpha)}_{\text{contributo di diffrazione}} \underbrace{\cos^2(\delta)}_{\text{contributo di interferenza}}$$

$\operatorname{sinc}^2(\alpha)$:

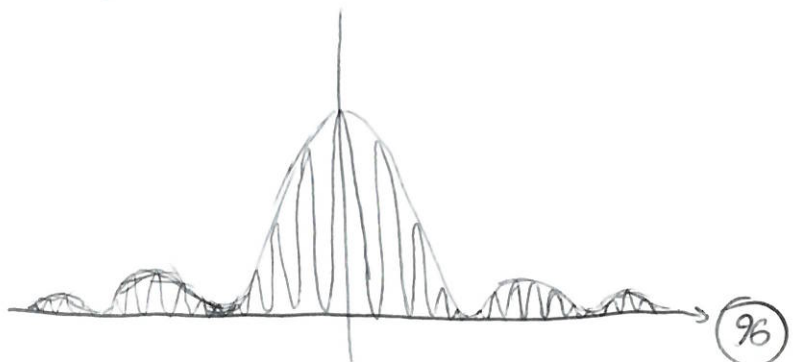


(so che δ
 $d > a \Rightarrow \delta > \alpha$)
 $\Rightarrow \cos^2$ oscilla
velocemente di sinc^2

$\cos^2(\delta)$:



$\Rightarrow \operatorname{sinc}^2(\alpha) \cdot \cos^2(\delta)$:



Io so che in $\sin\theta = \frac{n\lambda}{a}$ ho un minimo di diffrazione.
Se in quel punto ho un massimo di interferenza,
questo viene **CANCELLATO**.

Ho un massimo di interferenza se $\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}$
Quindi il max di interferenza viene cancellato nei punti

in cui

$$\frac{n\lambda}{a} = \frac{m\lambda}{d} \implies \frac{m}{n} = \frac{d}{a}$$

dove n = numero del minimo di diffrazione (di solito nei problemi parlano del I)

m = numero del massimo di interferenza (che viene cancellato)

RISOLUZIONE

La posizione dei massimi e dei minimi dipende da $\lambda \Rightarrow$ se utilizziamo per l'esperimento di Young una luce **Bicromatica** (quindi contenente due diverse lunghezze d'onda) la posizione dei massimi e dei minimi sarà diversa a seconda della lunghezza d'onda.

L'interferenza è quindi un metodo per ottenere **disposizione cromatica**.
Ma qual è la **minima distanza** tra due massimi tale per cui **vediamo** i due **massimi** come **distinti**?

Criterio empirico di **Rayleigh**: due immagini sono percepibili come **distinte** se il **MASSIMO DI DIFFRAZIONE** di una cade **almeno** sul **PRIMO MINIMO DI DIFFRAZIONE** dell'altra.

\Rightarrow la distanza tra i massimi delle due immagini deve essere almeno pari alla **distanza tra massimo e minimo** di diffrazione di ciascuna immagine.

La **risoluzione** di uno strumento ottico è la capacità di produrre **immagini distinte** di due oggetti molto **vicini fra loro**.

Poiché la posizione del I minimo di diffrazione è $y_1 = \frac{\lambda D}{a}$, avremo una **risoluzione maggiore** diminuendo D e aumentando a .
Ma non possiamo diminuire D per via del campo lontano.

~~Quindi?~~

Quindi? Aumentiamo a o aumentiamo il numero di fenditure (come vedremo)

RETICOLO DI DIFFRAZIONE

Un reticolo di diffrazione è un dispositivo in grado di **concentrare** l'intensità luminosa intorno ai massimi, quindi di **MIGLIORARE LA RISOLUZIONE**.

Un reticolo di diffrazione è costituito da uno schermo con **numerose fenditure** a piccola distanza l'una dall'altra.

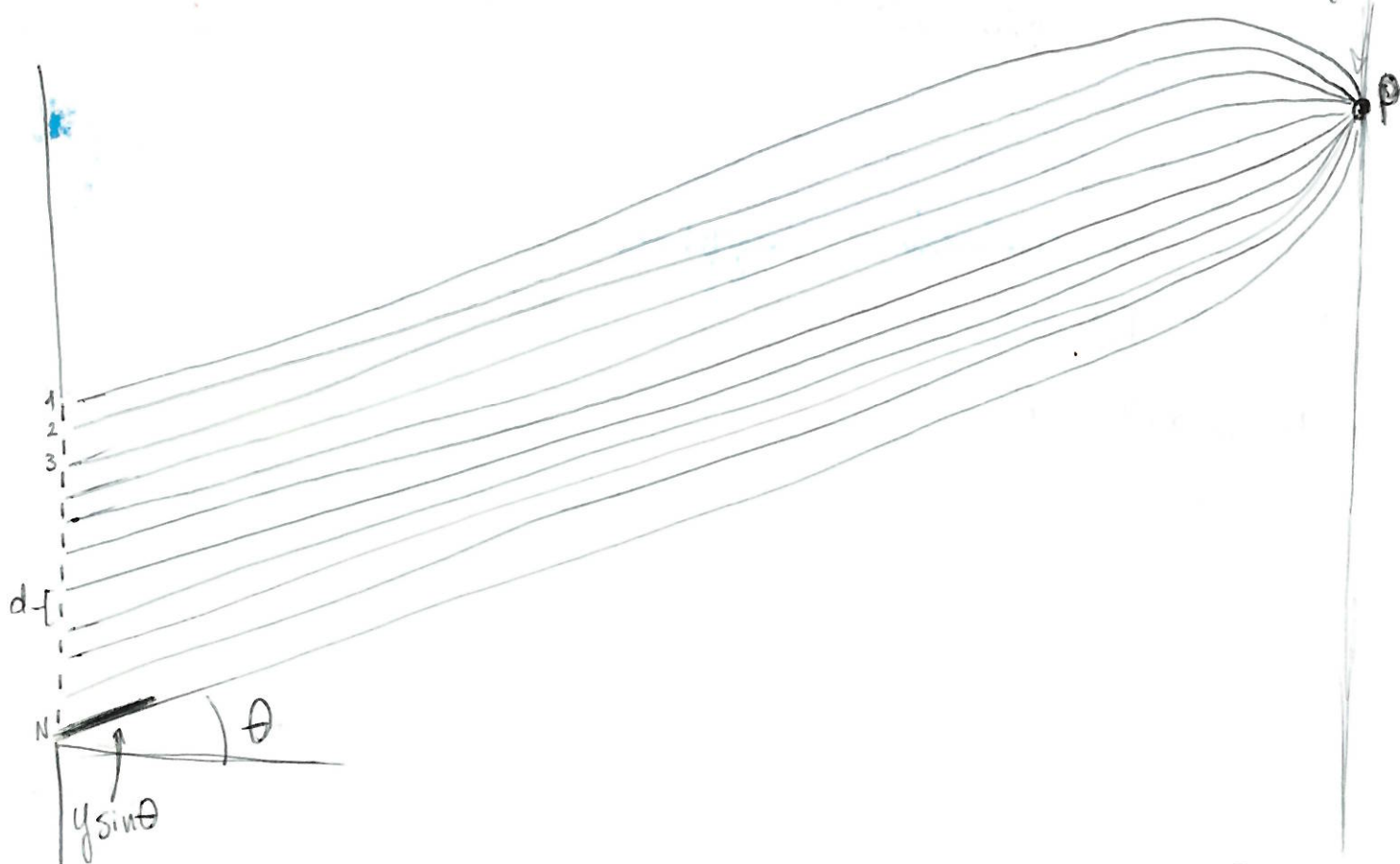
Reticolo investito da un'onda piana \rightarrow ogni fenditura diventa una **sorgente di onde sferiche**.

Come si distribuisce l'intensità nel **CAMPO LONTANO**?

Siano: **N** = numero di fenditure nel reticolo

d = distanza di una fenditura da quelle adiacenti

θ = angolo che caratterizza la posizione di un punto P sullo schermo nel campo lontano, ($D \rightarrow +\infty$)



In ogni punto P dello schermo l'intensità sarà data dall'interferenza tra le onde, che hanno tutte cammino ottico diverso \Rightarrow differenza di fase

- Ci saranno punti di **Massimo**, nei quali tutte le **N onde sferiche** fanno **interferenza costruttiva**, cioè dove la **differenza di cammino** tra due onde qualsiasi è uguale a **$n\lambda$**

Siano A, B, C tre fenditure consecutive

Differenza di cammino tra A e B: $r_B - r_A = d \sin\theta = n\lambda$

Differenza di cammino tra A e C: $r_C - r_A = 2d \sin\theta = 2n\lambda$

\Rightarrow **MASSIMO** quando $d \sin\theta = m\lambda \Rightarrow \boxed{\sin\theta_{\max} = \frac{m\lambda}{d}}$

Ampiezza dell'onda in un massimo: $E = E_0 \cdot N$
dove E_0 è l'ampiezza di una singola onda.

\Rightarrow **INTENSITA'** luminosa in un massimo: $I = I_0 N^2$

~~Però se si aumenta il numero di fenditure~~

Quindi, se **aumenta il numero di fenditure** aumenta anche l'**intensità** nei massimi.

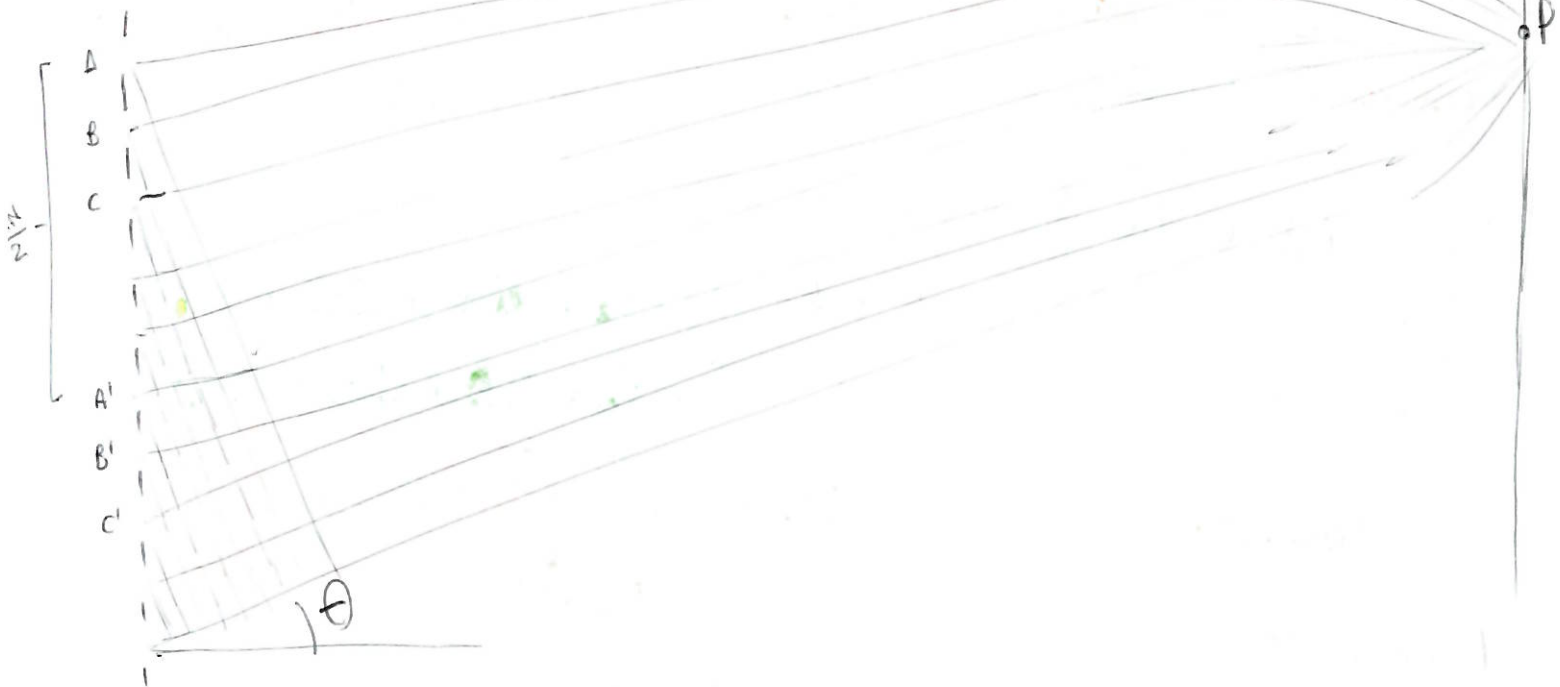
Intuitivamente, per la conservazione dell'energia, ci aspettiamo che se i **picchi** di intensità diventano più **alti**, diventeranno anche più **stretti**.

Adesso facciamo i calcoli.

Dividiamo il reticolo in due settori adiacenti: $\left\{ \begin{array}{l} A, B, C \dots \text{ fenditure nel I settore} \\ A', B', C' \dots \text{ fenditure nel II settore} \end{array} \right.$

Distanza tra A e A' (e anche tra B e B' ecc.) = $\frac{dN}{2}$

Il primo minimo lo avremo quando le onde generate da **A** e **A'** (e quindi anche quelle generate da B e B' ecc.) fanno **interferenza distruttiva**.



Interferenza distruttiva:
$$d \frac{N}{2} \sin \theta_{\min} = \frac{N}{2} m \lambda + \frac{\lambda}{2}$$

Poiché a noi interessa la distanza tra un massimo e un minimo, scriviamo $\theta_{\min} = \theta_{\max} + \Delta \theta$.

Sviluppiamo ^{il seno di} quest'ultima cosa con Taylor (al I ordine)

$$\sin(\theta_{\min}) = \sin(\theta_{\max} + \Delta \theta) = \sin(\theta_{\max}) + \Delta \theta \cos(\theta_{\max})$$

Sappiamo che $\sin(\theta_{\max}) = \frac{m \lambda}{d}$

Sostituiamo il $\sin(\theta_{\min})$ nell'equazione sopra:

$$d \frac{N}{2} \left(\frac{m \lambda}{d} + \Delta \theta \cos(\theta_{\max}) \right) = \frac{N}{2} m \lambda + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{2} m \lambda + d \frac{N}{2} \Delta \theta \cos(\theta_{\max}) = \frac{N}{2} m \lambda + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta \theta \cos(\theta_{\max}) = \frac{\lambda}{d N}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{\lambda}{N d \cos \theta_{\max}}$$

Quindi, in effetti, la distanza tra \ominus minimo e massimo è **inversamente** **proporzionale** al **numero di fenditure** N .

Adesso vogliamo valutare **quantitativamente** la **CAPACITA' RISOLUTIVA** di un reticolo di diffrazione.

Ho una **radiazione policromatica** incidente sul reticolo, chiamo $\delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ differenza tra due massimi dello stesso ordine generati da due lunghezze d'onda diverse λ_1 e λ_2

Chiamo **POTERE DISPERSIVO DEL RETICOLO** la quantità

$$D = \frac{\delta\theta}{\Delta\lambda}$$

Poiché abbiamo i due massimi quando:

$$\begin{cases} d \sin(\theta_1) = m \lambda_1 \\ d \sin(\theta_2) = d \sin(\theta_1 + \delta\theta) = m \lambda_2 = m (\lambda_1 + \Delta\lambda) \end{cases}$$

Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} \sin(\theta_1) = \frac{m \lambda_1}{d} \\ \sin(\theta_1) + \delta\theta \cos(\theta_1) = \frac{m \lambda_1}{d} + \frac{m \Delta\lambda}{d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m \lambda_1}{d} + \delta\theta \cos(\theta_1) = \frac{m \lambda_1}{d} + \frac{m \Delta\lambda}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos(\theta_1)} = D$$

Sviluppo:
 $d [\sin(\theta_1) + \delta\theta \cos(\theta_1)]$

Da ciò deduciamo che il potere ~~dispersivo~~ di un reticolo **aumenta** all'aumentare dell'**ordine del massimo**.

\Rightarrow Maggiore è l'ordine del massimo, più i due picchi sono separati.

Per avere una buona risoluzione, abbiamo bisogno di picchi abbastanza distinti:

Chiamo: $\Delta\lambda_{\min}$ la minima differenza di λ per cui i massimi dello stesso ordine diventano distinguibili

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \text{ la media fra le } \lambda$$

Chiamo **POTERE RISOLUTIVO DEL RETICOLO** la quantità

$$R = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda_{\min}}$$

Sappiamo che due picchi sono distinguibili se $\delta\theta \geq \Delta\theta$

Studio condizione limite $\delta\theta = \Delta\theta$

Siccome so che $\delta\theta = \frac{m}{d \cos\theta} \Delta\lambda$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{N d \cos\theta}$$

con $\theta = \theta_{\max}$

$$\delta\theta = \Delta\theta \Rightarrow \frac{m \Delta\lambda}{d \cos\theta} = \frac{\lambda}{N d \cos\theta} \Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = R = mN$$

CONDIZIONE LIMITE PER DISTINGUERE I PICCHI

Il **potere risolutivo** dipende quindi da **numero di fenditure** e **ordine del massimo**

Maggiori sono N e m , maggiore sarà il **potere risolutivo** del reticolo.

Per ora abbiamo tenuto conto solo dell'interferenza provocata dalle fenditure, ma non della diffrazione.

Adesso teniamo conto anche di questo effetto e cerchiamo di ricavare l'espressione analitica dell'intensità sullo schermo

Dall'~~l~~^{n-esima} fenditura adesso esce quest'onda:

$$E_n(\theta) = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos(k(z + \Delta z) - \omega t)$$

$$\text{con } \alpha = \frac{ak \sin \theta}{2}$$

$$= E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos(kz - \omega t + k \Delta z)$$

$$= E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos(kz - \omega t + \underbrace{knd \sin \theta}_{\phi})$$

In un punto dello schermo avremo la sovrapposizione delle N onde uscenti dalle fenditure

$$E_{\text{Tot}}(\theta) = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(kz - \omega t + \underbrace{n \phi}_{\phi} + \underbrace{2\delta}_{2\delta})$$

Esprimiamolo in forma esponenziale:

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\phi} \cdot e^{2i\delta}$$

$$= E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i\varphi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\delta n}$$

SOMMA PARZIALE DI SERIE GEOMETRICA

con ragione $q = e^{2i\delta}$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\delta n} = \frac{1 - e^{2i\delta N}}{1 - e^{2i\delta}}$$

$$\Rightarrow E(\theta) = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{1 - e^{2i\delta N}}{1 - e^{2i\delta}} e^{i\varphi} =$$

$$= E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin(\delta N)}{\sin(\delta)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \alpha \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}}$$

studio $\frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}$

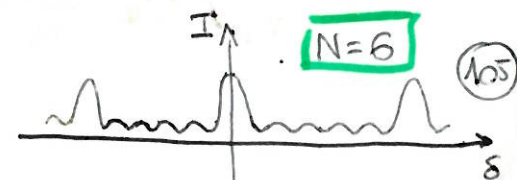
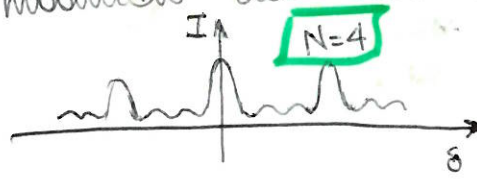
Zeri di $\sin^2(N\delta)$: ogni $\frac{\pi}{N}$
 Zeri di $\sin^2(\delta)$: ogni π } quando si annulla il denominatore, si annulla anche il numeratore.

In questi punti, $\frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)} \approx \frac{(N\delta)^2}{(\delta)^2} = \mathbf{N^2}$

Quindi ancora, nei massimi l'intensità è proporzionale a N^2 (i punti in cui $\sin^2(\delta) = 0$ sono i massimi, infatti $\sin^2(\delta) = 0$ per $\delta = \frac{k\alpha \sin \theta}{2} = \pi$, che è la condizione di massimo di interferenza)

Poiché abbiamo anche un $\sin^2(N\delta)$, avremo anche massimi e zeri secondari, tra un picco e l'altro. In particolare, ci saranno $N-2$ massimi secondari.

In più, il tutto è modulato dal seno cardinale.



OTICA GEOMETRICA

L'ottica geometrica si occupa di **dispositivi** in grado di **costruire immagini**.

Un'immagine costruita da un dispositivo non è sempre uguale all'originale. Essa può essere:

- **Reale**: quando i raggi provenienti da un punto dell'oggetto si **ricombinano effettivamente** in un **punto dell'immagine**.
- **Virtuale**: quando i raggi provenienti da un punto dell'oggetto ~~non~~ danno luogo a un fascio di **raggi divergenti** che **sembrano provenire da un unico punto**, nel quale però **non si incontrano fisicamente**.
- **Ingrandita**: quando è **più grande** dell'oggetto originale.
- **Rimpicciolita**: quando è **più piccola** dell'oggetto originale.
- **Diritta**: quando è nella ~~stessa~~ **stessa posizione** dell'oggetto originale.
- **Capovolta**: quando è **ribaltata** rispetto all'oggetto originale.

Per avere un'immagine nitida, devo mettermi nell'ipotesi di **approssimazione parassiale**: gli angoli dei raggi di luce rispetto all'asse ottico devono essere piccoli, tanto da poter approssimare i seni e le tangenti all'angolo stesso.

DIOTTRI

I diottri sono strumenti ottici composti da **due materiali** con **diverso indice di rifrazione** separati da una **superficie** ~~=====~~

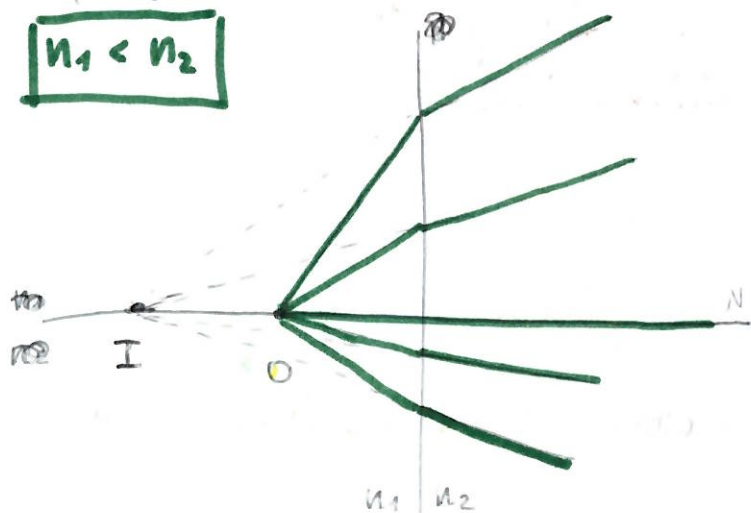
Prendo una **sorgente puntiforme**. Il raggio che dalla sorgente passa sull' **asse ottico** (\perp alla superficie del diotro) **non viene deviato**.

Tutti gli altri raggi vengono deviate.

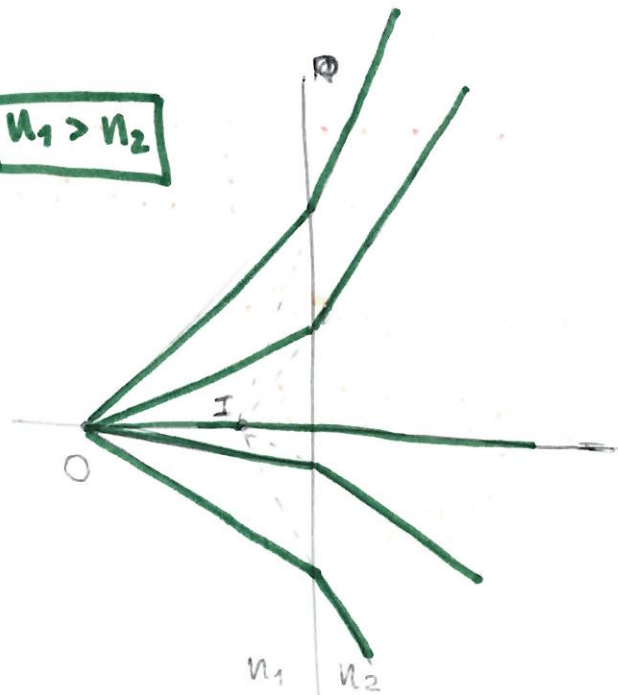
Diottri piani

Superficie di separazione piana

$$n_1 < n_2$$



$$n_1 > n_2$$

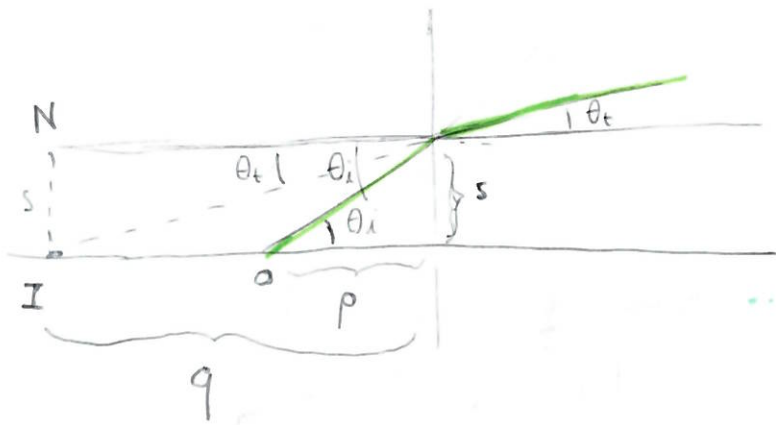


Entrambe le immagini sono virtuali.

I diottri piani fanno sembrare gli oggetti **più vicini** ($n_1 > n_2$) o **più lontani** ($n_1 < n_2$).

Esempio: se siamo su una barca e **guardiamo i pesci**, questi ci sembrano **più vicini** (caso $n_1 > n_2$)

Cerchiamo ora di quantificare questo fenomeno!



Legge di Snell: $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$

Per l'approssimazione parassiale, $\sin \theta \approx \tan \theta$

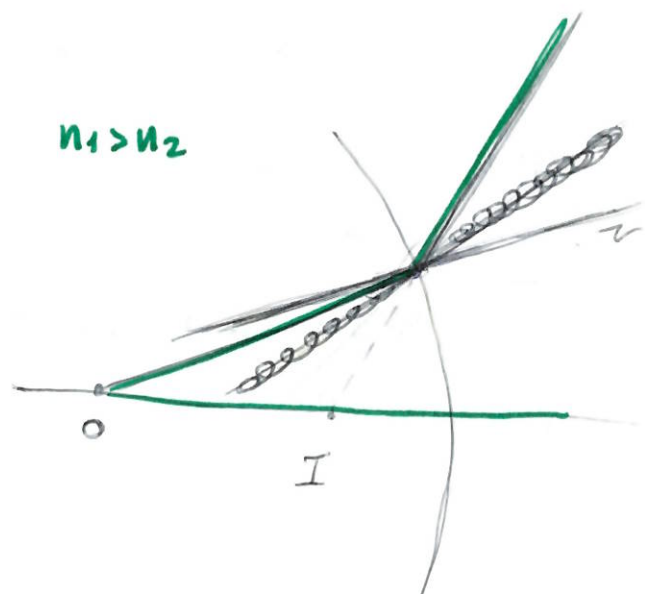
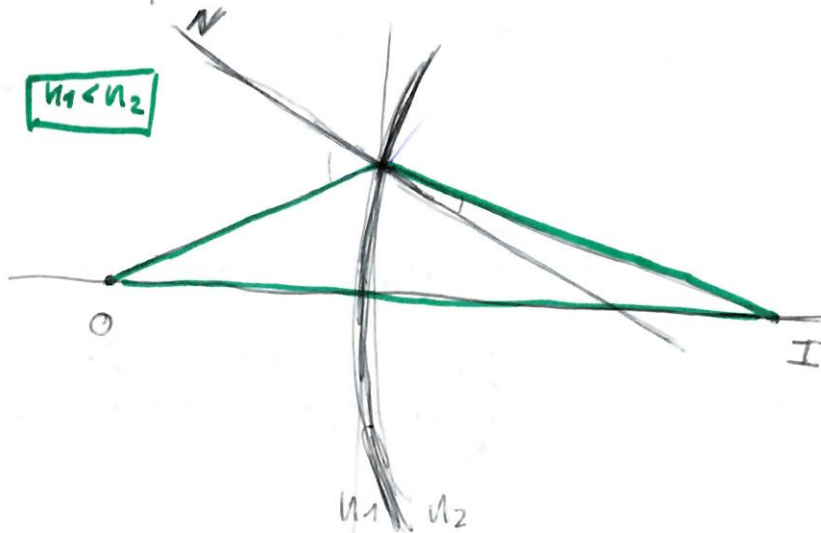
$$\tan \theta_i = \frac{s}{p}$$

$$\tan \theta_t = \frac{s}{-q} \leftarrow q \text{ e' dalla parte di } p \text{ (virtuale)}$$

$$\Rightarrow \frac{n_1 s}{p} = \frac{n_2 s}{-q} \Rightarrow \frac{n_1}{p} = -\frac{n_2}{q} \Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = 0} \begin{array}{l} \text{DIOTTRO} \\ \text{PIANO} \end{array}$$

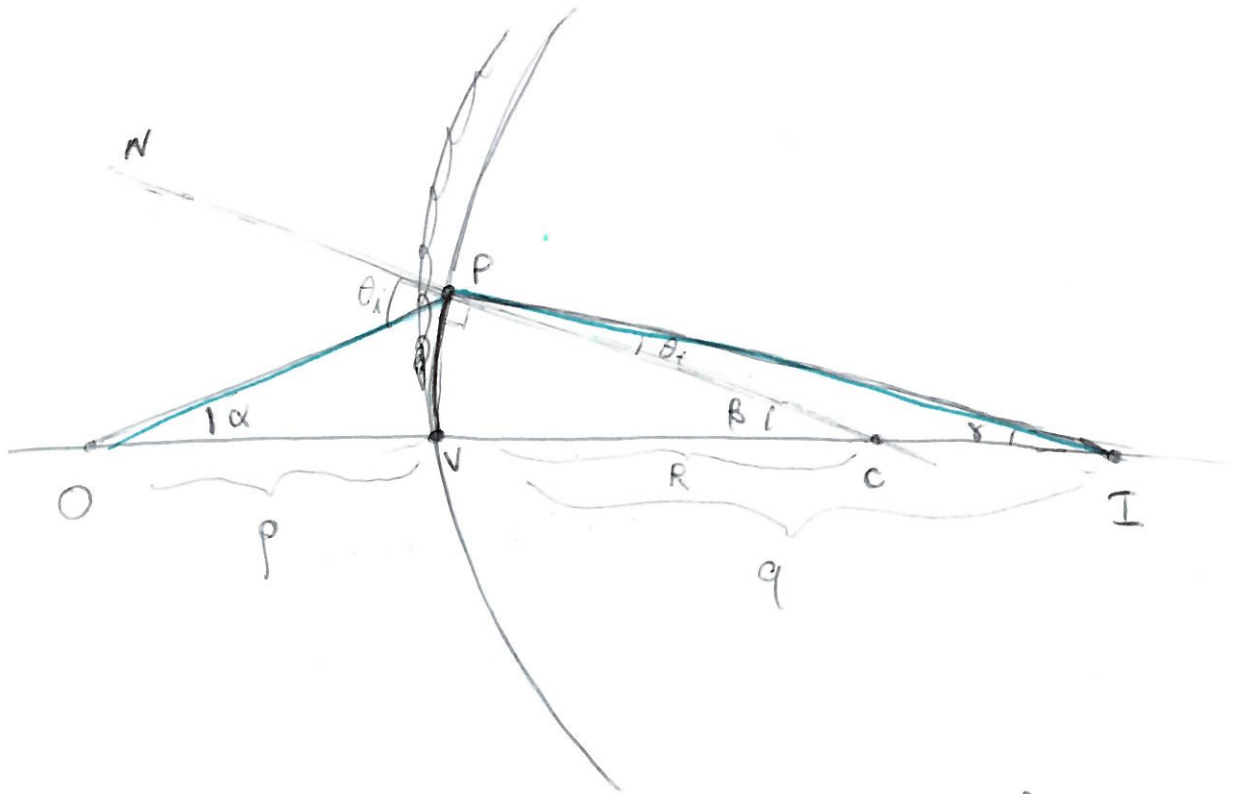
Diottri sferici

superficie di separazione sferica



Nel primo caso, l'immagine e' reale, nel secondo virtuale.

Anche in questo caso, quantifichiamo.



La normale passa dal centro C della circonferenza.

CONSIDERO $\triangle COP$: $\begin{cases} \widehat{CPO} = 180^\circ - (\alpha + \beta) \\ \widehat{CPO} = 180^\circ - \theta_i \end{cases} \rightarrow \alpha + \beta = \theta_i$

CONSIDERO $\triangle CPI$: $\begin{cases} \widehat{PCI} = 180^\circ - (\theta_t + \gamma) \\ \widehat{PCI} = 180^\circ - \beta \end{cases} \rightarrow \beta = \gamma + \theta_t$

Legge di Snell: $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$

Approssimaz. parassiale $\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta_i \approx \theta_i = \alpha + \beta \\ \sin \theta_t \approx \theta_t = \beta - \gamma \end{cases} \Rightarrow n_1(\alpha + \beta) = n_2(\beta - \gamma)$

$\Rightarrow n_1 \alpha + n_1 \beta = n_2 \beta - n_2 \gamma \Rightarrow \beta(n_2 - n_1) = n_1 \alpha + n_2 \gamma$

Approssimaz. parassiale $\Rightarrow \begin{cases} \alpha \approx \frac{PV}{p} \\ \gamma \approx \frac{PV}{q} \\ \beta \approx \frac{PV}{R} \end{cases} \Rightarrow \frac{PV}{R}(n_2 - n_1) = \frac{PV}{p} n_1 + \frac{PV}{q} n_2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}}$

DIOTIRO
SFERICO

Questa formula funziona anche per punti che non si trovano sull'asse ottico.

Adesso studiamo due casi particolari.

① OGGETTO MOLTO LONTANO DAL DIOTRO: $p \rightarrow +\infty$

In questo caso, tutti i raggi che arrivano dall'oggetto

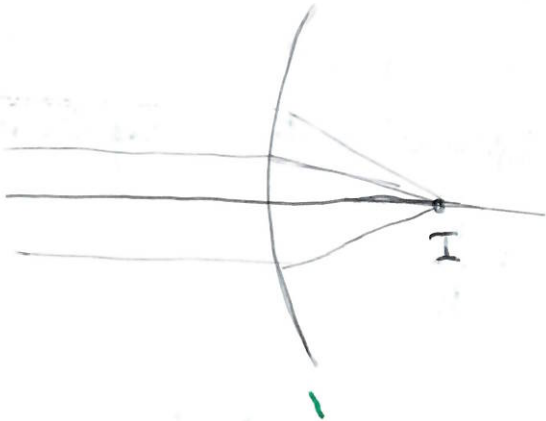
sono **paralleli**.

$$\text{Se } p \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{n_1}{p} \rightarrow 0$$

Quindi la nostra formula diventa

$$\frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\Rightarrow q = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} = f_1 \quad \begin{array}{l} \text{PRIMO FUOCO} \\ \text{DEL DIOTRO} \end{array}$$



② IMMAGINE MOLTO LONTANA DAL DIOTRO: $q \rightarrow +\infty$

In questo caso, tutti i raggi che arrivano all'immagine

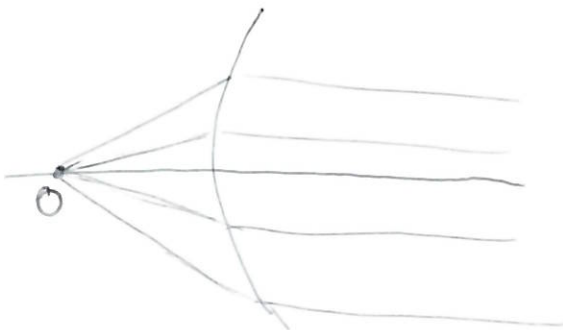
sono **paralleli**.

$$\text{Se } q \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{n_2}{q} \rightarrow 0$$

Quindi la nostra formula diventa

$$\frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

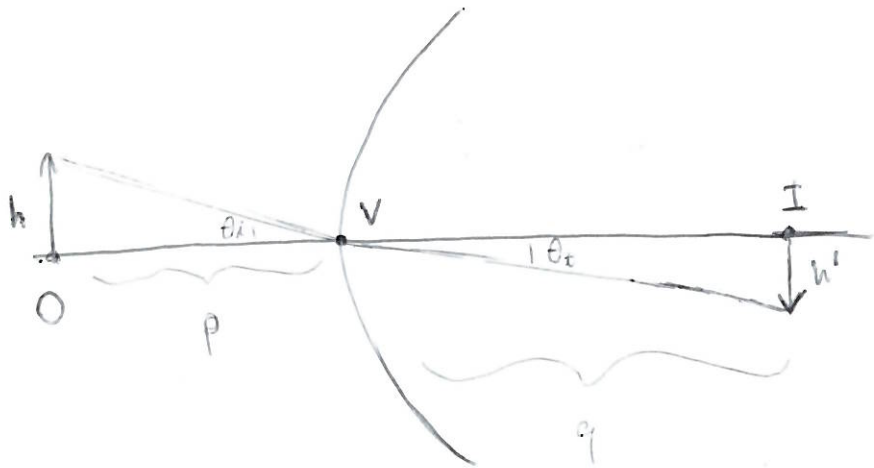
$$\Rightarrow p = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} = f_2 \quad \begin{array}{l} \text{SECONDA FUOCO} \\ \text{DEL DIOTRO} \end{array}$$



Nel caso dei diottri, la posizione dei due fuochi non è simmetrica. Infatti essi dipendono da due indici di rifrazione diversi. (110)

Oggetti non puntiformi

Come abbiamo detto, si può usare la formula dei dioftri anche per punti che non giacciono sull'asse ottico.



Possiamo chiederci quanto sia **ingrandita** l'immagine.

A questo proposito introduciamo l'**ingrandimento**, o **magnification**

$$M = \frac{h'}{h}$$

Appr. par: $\left. \begin{aligned} \theta_i &\approx \tan \theta_i = \frac{h}{p} \\ \theta_t &\approx \tan \theta_t = \frac{-h'}{q} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M = \frac{h'}{h} = -\frac{\theta_t q}{\theta_i p}$

legge di Snell in appr. par: $n_1 \theta_i \approx n_2 \theta_t \Rightarrow \frac{\theta_t}{\theta_i} \approx \frac{n_1}{n_2}$

$$\Rightarrow M = \frac{h'}{h} = -\frac{n_1 q}{n_2 p}$$

INGRANDIMENTO
NEL DIOTRO

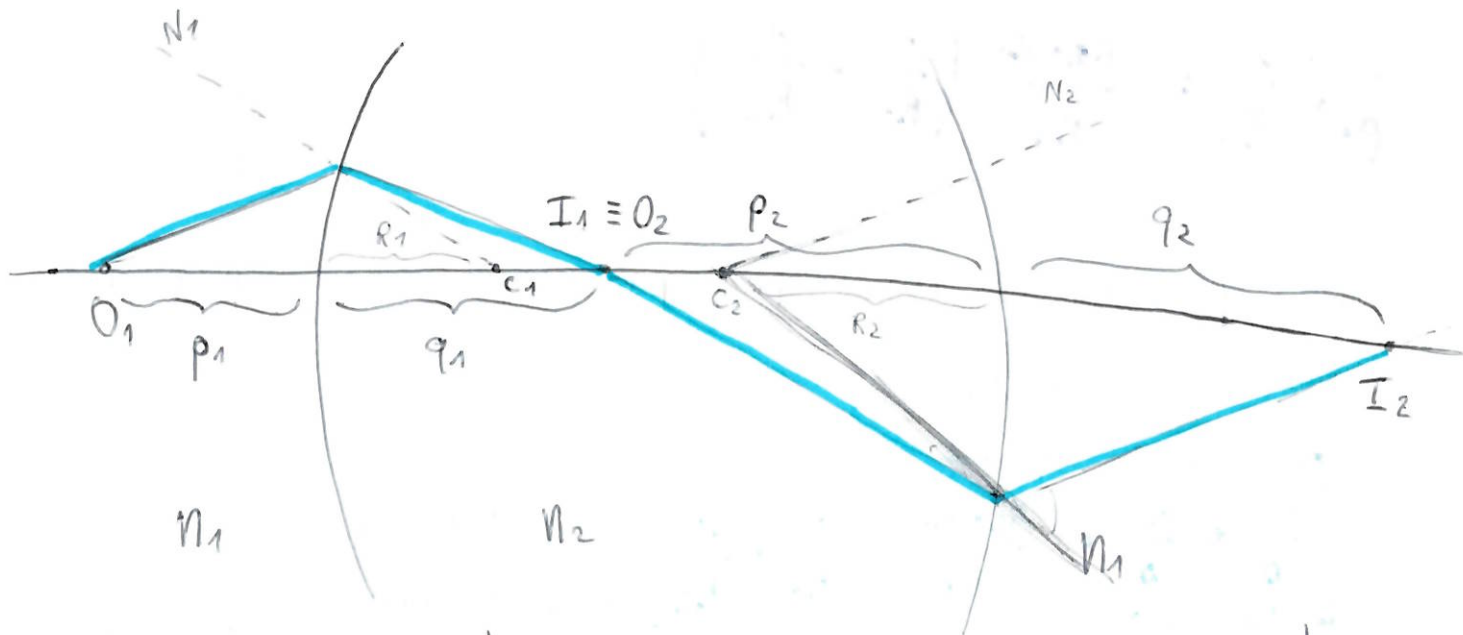
CONVENZIONI PER I SEGNI

- $p > 0$ $O \in$ ~~Reale~~ Virtuale (sempre)
- $q > 0$ $I \in$ Reale
- $q < 0$ $I \in$ Virtuale
- $R > 0$ $C \in$ Reale
- $R < 0$ $C \in$ Virtuale



LENTI

È molto "comodo", però, portarsi dietro dei diottri (sono superfici infinite!)
È molto più comodo (e verosimile) **accostare due superfici diottriche**
Una lente è proprio questo: è una **coppia di diottri** posti uno dopo
l'altro lungo il cammino ottico.



In questo modo, l'**immagine** del primo diottrò diventa l'**oggetto** del secondo diottrò.

Scriviamo separatamente le equazioni dei due diottri:

$$\begin{cases} \frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} & \text{I diottrò} \\ \frac{n_2}{p_2} + \frac{n_1}{q_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} & \text{II diottrò} \end{cases}$$

Sommiamo le due equazioni:

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_1}{q_2} + \frac{n_2}{q_1} + \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

Raccogliamo

$$= \frac{p_2 + q_1}{p_2 q_1}$$

$$n_1 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} \right) + n_2 \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} \right) = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Introduco l'approssimazione di **lente sottile**: la distanza ~~tra i due~~ ~~diottri~~ ~~è~~ infinitesima \Rightarrow ~~$p_2, q_1 \rightarrow 0$~~ $p_2 + q_1 \rightarrow 0$ ($\Rightarrow p_2 \rightarrow -q_1$)

In questo modo, la nostra equazione diventa:

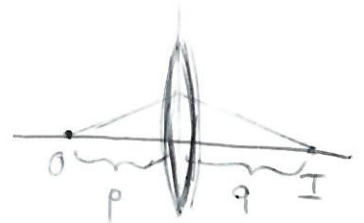
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Poiché p_2 e q_1 non esistono più, possiamo rinominare $p_1 = p$ e $q_2 = q$

In questo modo otteniamo

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

EQUAZIONE DEL
CONSTRUTTORE
DI LENTI



Come prima, possiamo trovare i fuochi

$$\left. \begin{aligned} p \rightarrow +\infty &\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f_1} \\ q \rightarrow +\infty &\Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_1 = f_2 = f$$

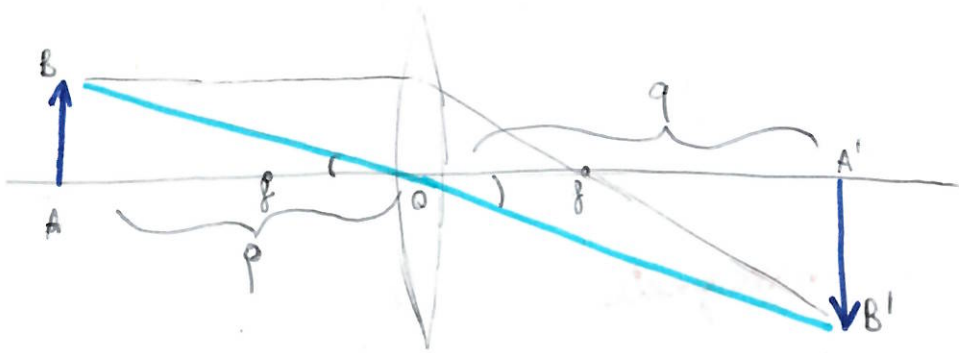
I FUOCHI SONO SIMMETRICI

Posso riscrivere l'equazione del costruttore di lenti come:

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}}$$

LEGGE DEI
PUNTI CONIUGATI

Cerchiamo di calcolare l'ingrandimento



Poiché i triangoli $\triangle ABO$ e $\triangle A'B'O$ (rettangoli con un angolo congruente perché opposto al vertice),

allora vale

$$M = \frac{A'B'}{AB} = -\frac{q}{p} = \frac{f}{f-p}$$

Se metto l'oggetto nel fuoco, i raggi passando dalla lente diventano **paralleli** \Rightarrow posso creare una situazione di **CAMPO LONTANO**

Classificazione lenti

$$f = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{pq}{p+q}$$

Se $f > 0 \Rightarrow$ lente **convergente** (o positiva)

Se $f < 0 \Rightarrow$ lente **divergente** (o negativa)

LENTE BICONVESSA

$$\left(\begin{array}{l} R_1 > 0 \\ R_2 < 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} > 0 \quad \text{Conv.}$$

LENTE PIANCONVESSA

$$\left(\begin{array}{l} R_1 > 0 \\ R_2 = +\infty \end{array} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} > 0$$
$$\left(\begin{array}{l} R_1 = +\infty \\ R_2 < 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -\frac{1}{R_2} > 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{f} > 0 \quad \text{conv.}$$

LENTE MENISCO CONVESSA

$$\left(\begin{array}{l} R_1 > 0 \\ R_2 > 0 \end{array} \right) \text{ con } R_1 < R_2 \Rightarrow \frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2} \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > 0$$
$$\left(\begin{array}{l} R_1 < 0 \\ R_2 < 0 \end{array} \right) \text{ con } |R_1| > |R_2| \Rightarrow \left| \frac{1}{R_1} \right| < \left| \frac{1}{R_2} \right| \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{f} > 0 \quad \text{conv.}$$

LENTE BICONCAVA

$$\left(\begin{array}{l} R_1 < 0 \\ R_2 > 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) < 0 \Rightarrow \frac{1}{f} < 0 \quad \text{div.}$$

LENTE PIANCONCAVA

$$\left. \begin{array}{l} R_1 < 0 \\ R_2 = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} < 0$$

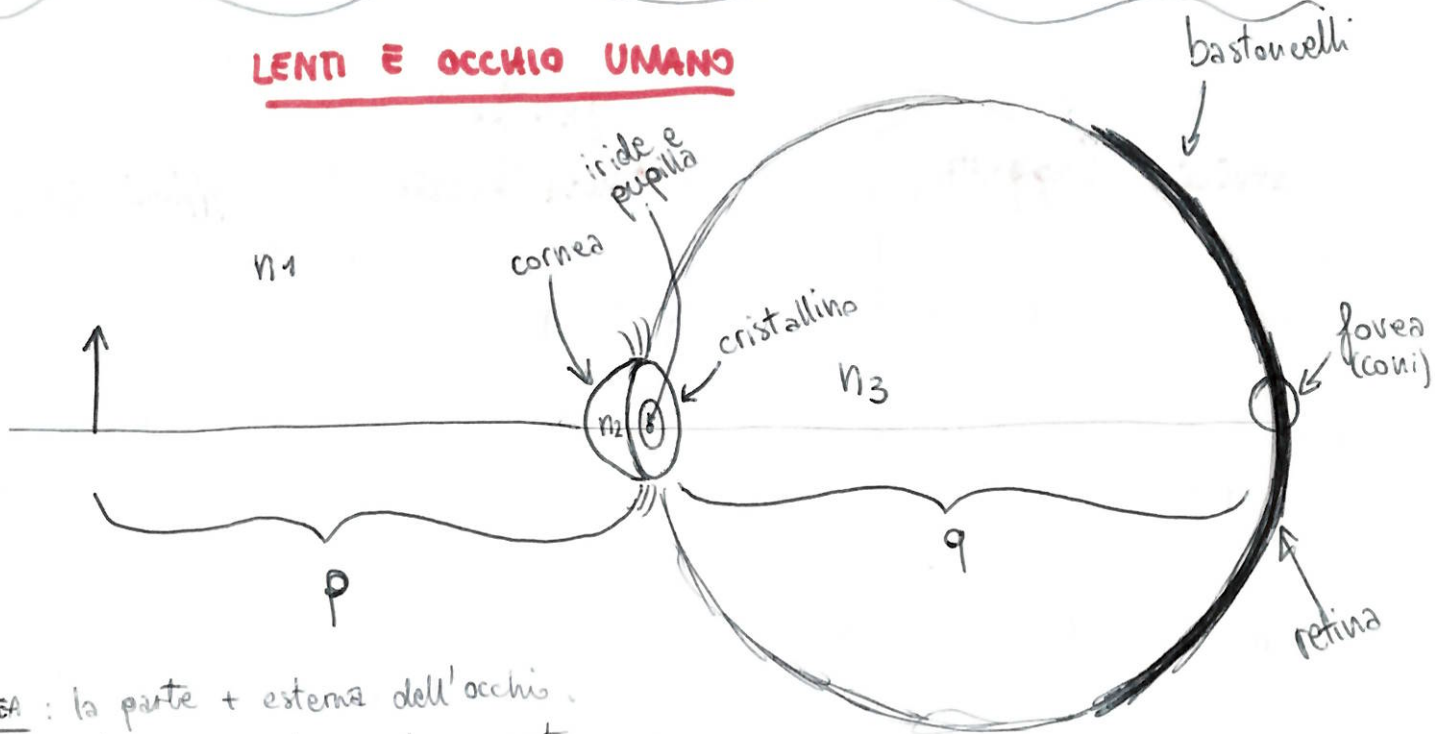
$$\left. \begin{array}{l} R_1 = +\infty \\ R_2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -\frac{1}{R_2} < 0 \Rightarrow \frac{1}{f} < 0 \text{ div.}$$

LENTE MENISCO CONCAVA

$$\left. \begin{array}{l} R_1 < 0 \\ R_2 < 0 \end{array} \right\} \text{ con } |R_1| < |R_2| \Rightarrow \left| \frac{1}{R_1} \right| > \left| \frac{1}{R_2} \right| \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} R_1 > 0 \\ R_2 > 0 \end{array} \right\} \text{ con } R_1 > R_2 \Rightarrow \frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2} \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) < 0 \Rightarrow \frac{1}{f} < 0 \text{ div.}$$

LENTI E OCCHIO UMANO



CORNEA: la parte + esterna dell'occhio.

È una membrana trasparente, separa l'aria dall'umore acqueo (n_2)

PUPILLA: Grazie ai muscoli dell'iride, si dilata e si restringe a seconda della quantità di luce.

CRISTALLINO: Separa umore acqueo e umore vitreo (n_3). Funziona come una lente regolabile.

RETINA: Dove si formano le immagini. Formata da coni e bastoncelli.

CONI: Si concentrano nella parte centrale della retina, ci permettono di distinguere bene un'immagine frontale.

BASTONCELLI: Si concentrano nelle zone più lontane della retina, sono utili per la visione periferica e nelle situazioni di poca luce. Non permettono di vedere i colori.

FOVEA: Zona con massima concentrazione di coni

Il raggio di luce entrante nell'occhio viene **rifatto due volte**:
dalla cornea ($n_1 \rightarrow n_2$) e dal cristallino ($n_2 \rightarrow n_3$).

Ho quindi un oggetto che posso trattare come una singola lente.

Ma a differenza dei sistemi ottici che abbiamo studiato (fisso $f \rightarrow$ vario $p \rightarrow$ trovo q), qui **la distanza q è fissata**.

Anche **p è fissata** \Rightarrow l'unica cosa che posso **variare** è la **distanza focale**.

Questo è il compito del **cristallino**.

Il cristallino è una struttura ~~elastica~~ elastica, azionata dai **muscoli ciliari**.

Di solito, quando i muscoli sono rilassati, avrà una distanza focale **f_1** .
Contractando i muscoli ciliari, il cristallino assume una forma più "bombata" e la distanza focale diminuisce (**$f_2 < f_1$**).

Più **avvicino l'oggetto**, più la **distanza focale** deve **diminuire**.

C'è comunque un limite di contrattura dei muscoli ciliari: nell'uomo, non riesce a distinguere bene un oggetto posto a meno di 20 cm dal mio occhio.

Invecchiando, non si riesce più a contrarre bene i muscoli ciliari \Rightarrow si hanno problemi di vista.

~~Il problema è che~~ ~~il~~ ~~angolo~~ ~~è~~ ~~il~~

Man mano che avvicino un oggetto all'occhio, ~~il~~ sottende un angolo sempre maggiore

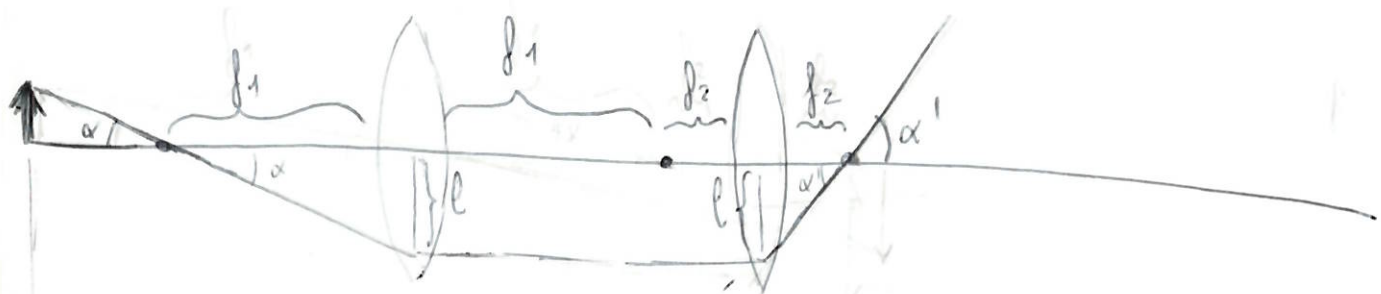


$$\frac{h}{p} = \tan \alpha \approx \alpha$$

Esistono dispositivi in grado di farci vedere cose lontanissime (che non affaticano l'occhio) grandi come se fossero vicine (cannocchiale) oppure di farci vedere cose vicine (mantenendo le dimensioni) facendo arrivare raggi ad angoli molto piccoli, per non affaticare l'occhio (microscopio). Studiamoli.

CANNOCCHIALE

Due lenti con f diversa, confocali. $f_2 < f_1$



~~$$\frac{l}{f_1} = \alpha$$~~

$$\frac{l}{f_1} = \alpha$$

$$\frac{l}{f_2} = \alpha'$$

$$l = f_1 \alpha = f_2 \alpha' \Rightarrow \alpha' = \frac{f_1}{f_2} \alpha$$

$$f_1 > f_2 \Rightarrow \boxed{\alpha' > \alpha}$$

α = angolo con cui il mio occhio nudo vede l'oggetto

α' = angolo che esce dalla lente

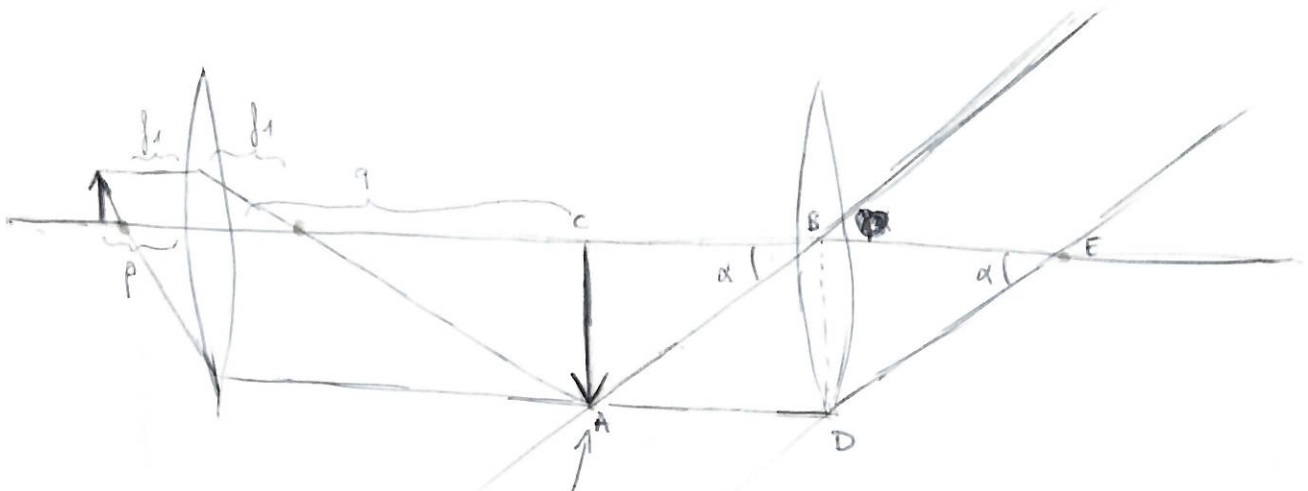
immagine virtuale

MICROSCOPIO

Due lenti: la prima serve per ingrandire l'oggetto, la seconda per far sì che i raggi arrivino paralleli.

Fuoco della prima lente molto vicino all'oggetto.

Fuoco della seconda lente messo dove si forma l'immagine della prima lente



$$M = -\frac{q}{p} \quad q \gg p$$

$\triangle ABC$ e $\triangle BDE$ sono simili ^{congruenti} infatti $\overline{AC} = \overline{BD}$ per costruzione
 $\hat{ACB} = \hat{DBE}$ perché rettangoli per costruzione
 $\overline{CB} = \overline{BE} = f_2$

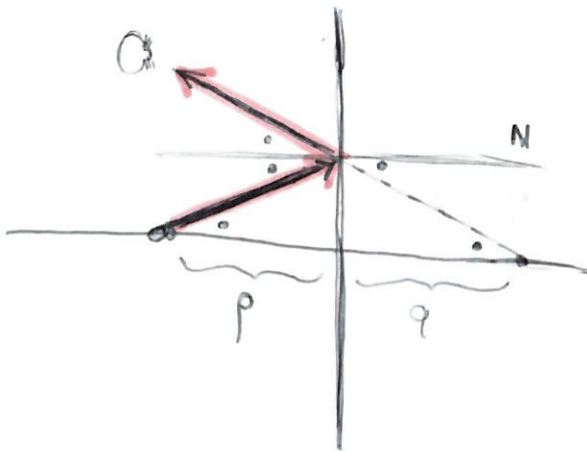
immagine virtuale formata all'infinito

$\Rightarrow \hat{ABC} = \hat{DEB} \Rightarrow$ le due rette sono **parallele**.

SPECCHI

In questo caso l'immagine è reale se q è dalla stessa parte di p

Specchio piano



$$p = -q$$

$$p > 0$$

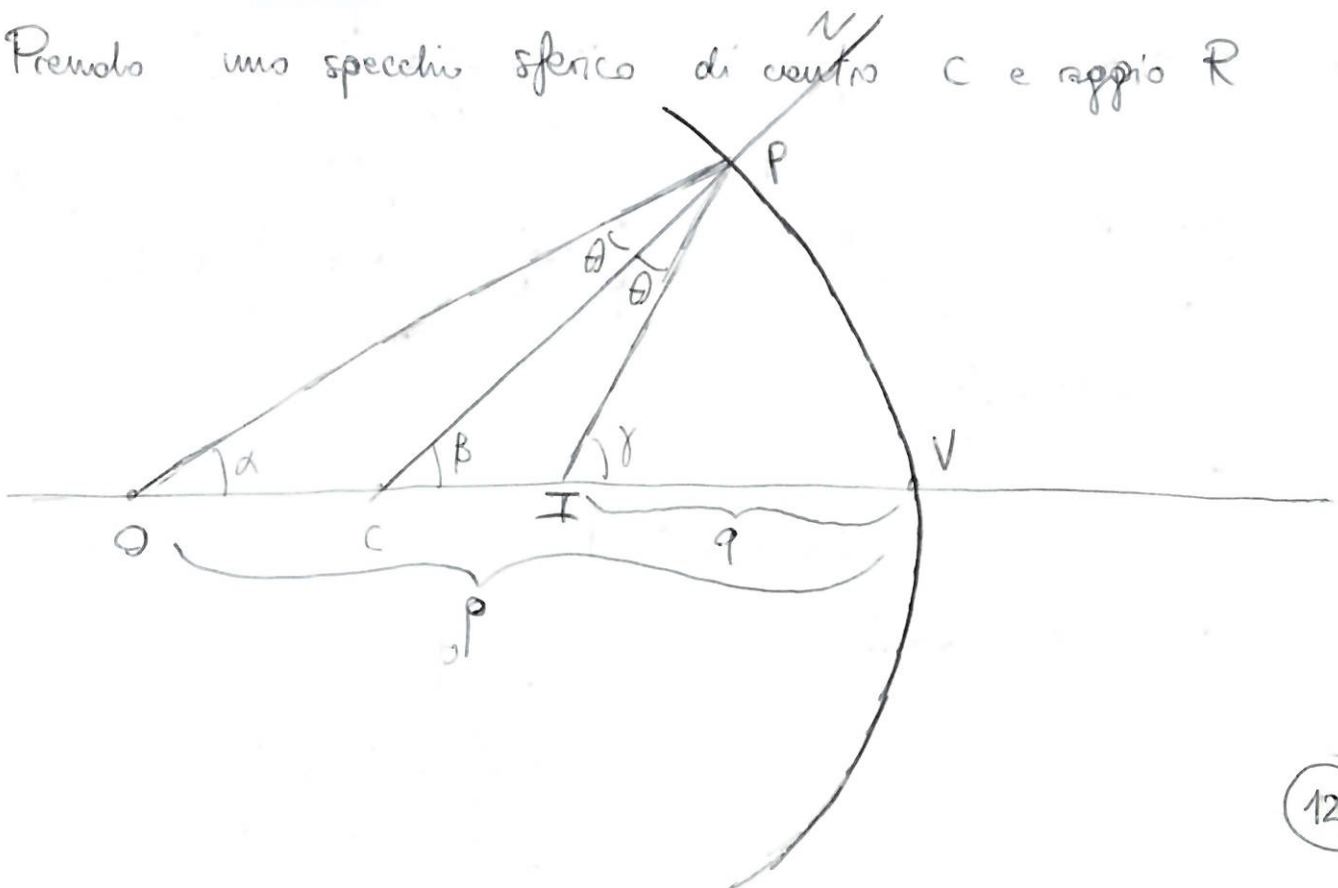
$$q < 0$$

Immagine virtuale ($q < 0$)

$$M = \frac{-q}{p} = 1$$

Specchio curvo

Prendo uno specchio sferico di centro C e raggio R



La normale alla superficie passa per il centro della sfera.

I raggi provenienti dall'oggetto O si riflettono in modo che ~~da~~ prima angolo incidente e riflesso siano uguali.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Considero triangolo } \widehat{COA} : \alpha + \theta = \beta \\ \text{Considero triangolo } \widehat{CIP} : \beta + \theta = \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \beta - \alpha = \gamma - \beta$$

$$\Rightarrow \alpha + \gamma = 2\beta$$

~~da~~ In approssimazione parassiale,

$$\frac{\widehat{PV}}{p} = \tan \alpha \approx \alpha \quad \frac{\widehat{PV}}{R} = \tan \beta \approx \beta \quad \frac{\widehat{PV}}{q} = \tan \gamma \approx \gamma$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{PV}}{p} + \frac{\widehat{PV}}{q} = 2 \frac{\widehat{PV}}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}}$$

$$\text{Se } p \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \Rightarrow \boxed{q = \frac{R}{2} = f_1}$$

$$\text{Se } q \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{q} = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{2}{R} \Rightarrow \boxed{p = \frac{R}{2} = f_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_1 = f_2 = \frac{R}{2}}$$

I focchi sono simmetrici, la lunghezza focale è metà del raggio della circonferenza

\Rightarrow È valida la legge del ^{punti} ~~conjugati~~ coniugati

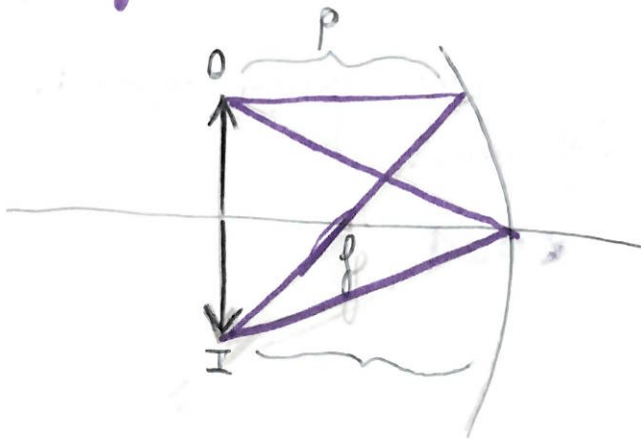
$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}}$$

SPACCHI CONCAVI

$$\boxed{f > 0, p > 0}$$

f fuoco nel semispazio reale

$$-p = -2f$$



L'oggetto si trova nel centro della circonferenza

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow -\frac{1}{2f} + \frac{1}{f} = \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2f} = \frac{1}{q} \Rightarrow \boxed{q = p = 2f}$$

Immagine con le **stesse dimensioni** dell'oggetto, nello **stesso punto** ma **capovolta**.

$$M = \frac{-q}{p} = -1$$

$$-p > 2f$$

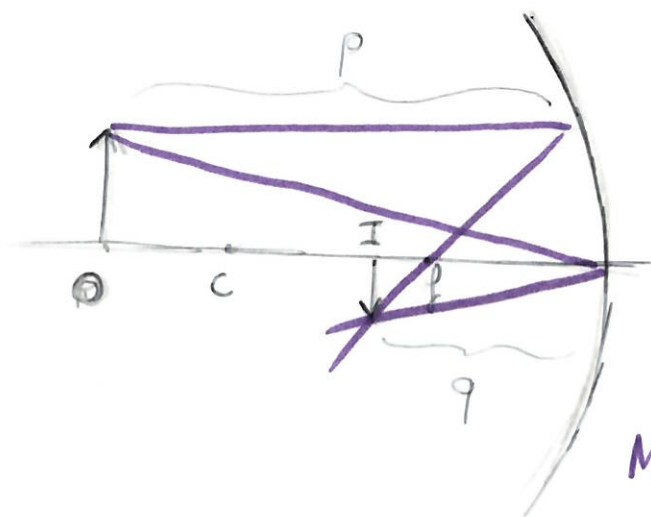
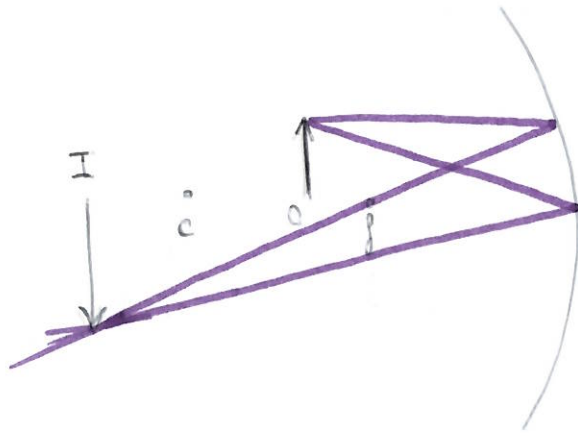


Immagine **reale**, **capovolta**, **rimpicciolita**

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} > \frac{1}{2f} &\Rightarrow q < 2f \\ p \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{q} < \frac{1}{f} &\Rightarrow q > f \end{aligned} \right\} f < q < 2f$$

$$M = \frac{-q}{p} \Rightarrow -1 < M < 0$$

$$-f \leq p < 2f$$



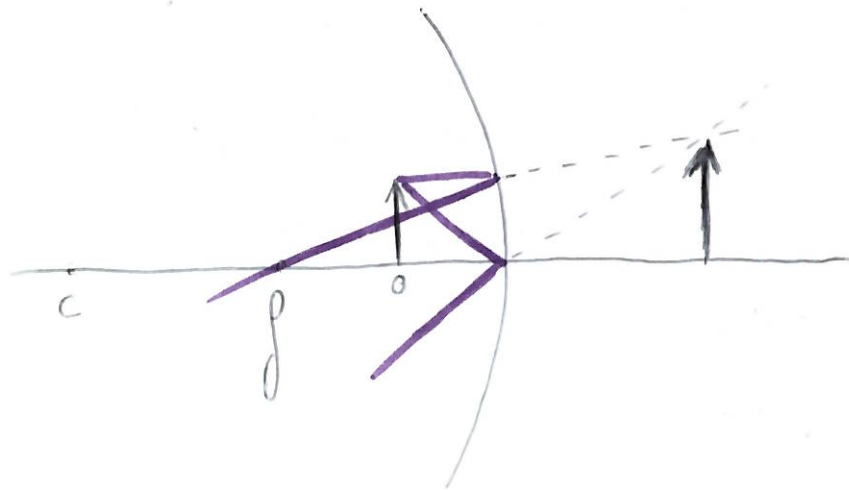
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow 0 < \frac{1}{q} < \frac{1}{2f}$$

$$\Rightarrow q > 2f$$

Immagine reale, capovolta,
ingrandita

$$M < 0 - 1$$

$$-p < f$$



$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$p < f \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{f} \Rightarrow q < 0$$

$$M > 1$$

Immagine virtuale, dritta,
ingrandita

SPECCHI CONVESSI.

$p > 0, f < 0$ fuoco nel semispazio virtuale

Per la legge dei punti coniugati, $q < 0 \Rightarrow$ l'immagine è sempre virtuale

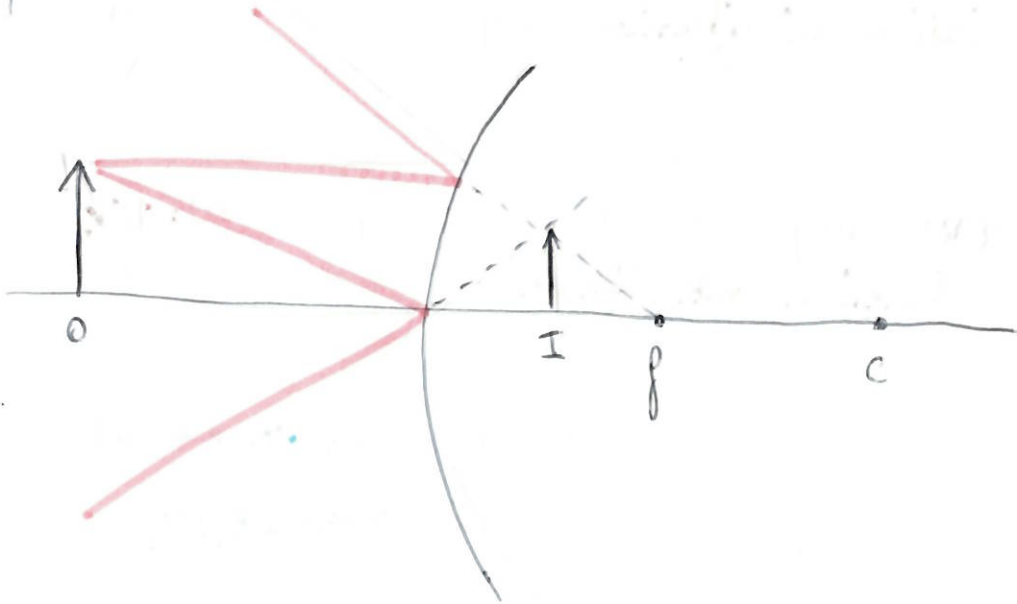


Immagine sempre virtuale, dritta, rimpicciolita

$$0 < M < 1$$

RADIAZIONE POLICROMATICA : DISPERSIONE

L'equazione di D'Alembert per la luce: vale solo nel vuoto.

In qualsiasi altro mezzo, la sua **velocità** dipendono, oltre che dal materiale attraversato, dalla **lunghezza d'onda**: ho una $v(\lambda)$

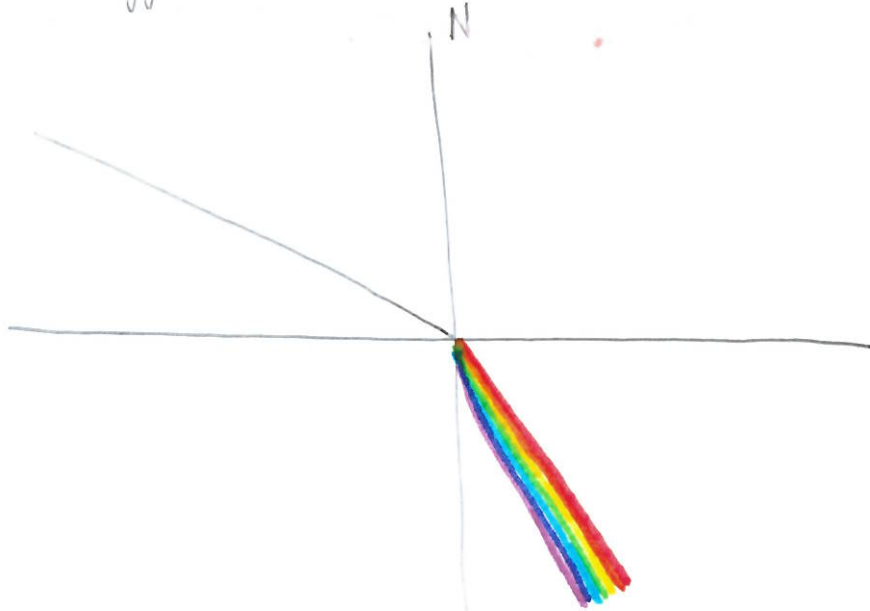
Quindi anche l'**indice di rifrazione** dipende dalla lunghezza d'onda.

In un mezzo ~~non~~ dispersivo non vale più $\omega = vk$, ma ω diventa una **funzione non lineare** di k

Ad esempio, nell'acqua,

$\lambda_{\text{violetto}} = 400 \text{ nm}$	$n_{\text{violetto}} = 1,344$
$\lambda_{\text{rosso}} = 800 \text{ nm}$	$n_{\text{rosso}} = 1,329$

È una piccola differenza, ma non è trascurabile.



Ma quanto è grande esattamente la separazione dei colori?

Legge di Snell: $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$

Differenzio la relazione (derivata): $n_1 \sin \theta_i$ costante \Rightarrow diventa 0

$$0 = \Delta n_2 \cdot \sin \theta_t + n_2 \cdot \cos \theta_t \cdot \Delta \theta_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \theta_t = - \frac{\Delta n_2}{n_2} \tan \theta_t}$$

Stimiamo un ordine di grandezza: se $\theta_t = 45^\circ$, $\Delta \theta_t = - \frac{\Delta n}{n} \approx -10^{-2} \text{ rad}$
 $\approx -0,5$

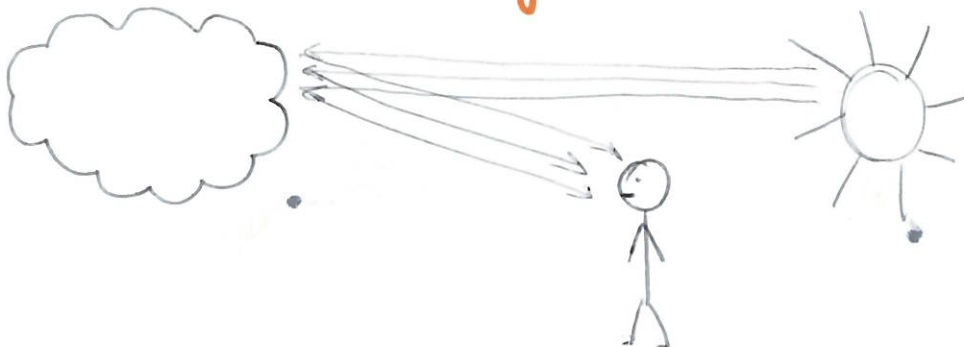
Si vede molta poco la dispersione.

Per studiare la dispersione posso usare un **PRISMA** (ho due rifrazioni quindi la luce si disperde doppiamente) oppure posso studiare un fenomeno naturale: l'**arcobaleno**.

ARCOBALENO

Per vedere l'arcobaleno, deve esserci il sole basso all'orizzonte, che devo tenere alle mie spalle, e devono esserci davanti a me gocce d'acqua sospese nell'aria illuminata dal sole.

L'arcobaleno è dato dalla **riflessione e rifrazione multipla** della luce bianca **in una goccia** d'acqua.



Una **goccia d'acqua** e' bene approssimabile con una sfera: infatti, poiche' risente della **tensione superficiale**, tende a minimizzare la superficie esposta. Inoltre, poiche' e' in **caduta libera**, e' come se non risentisse di alcuna forza

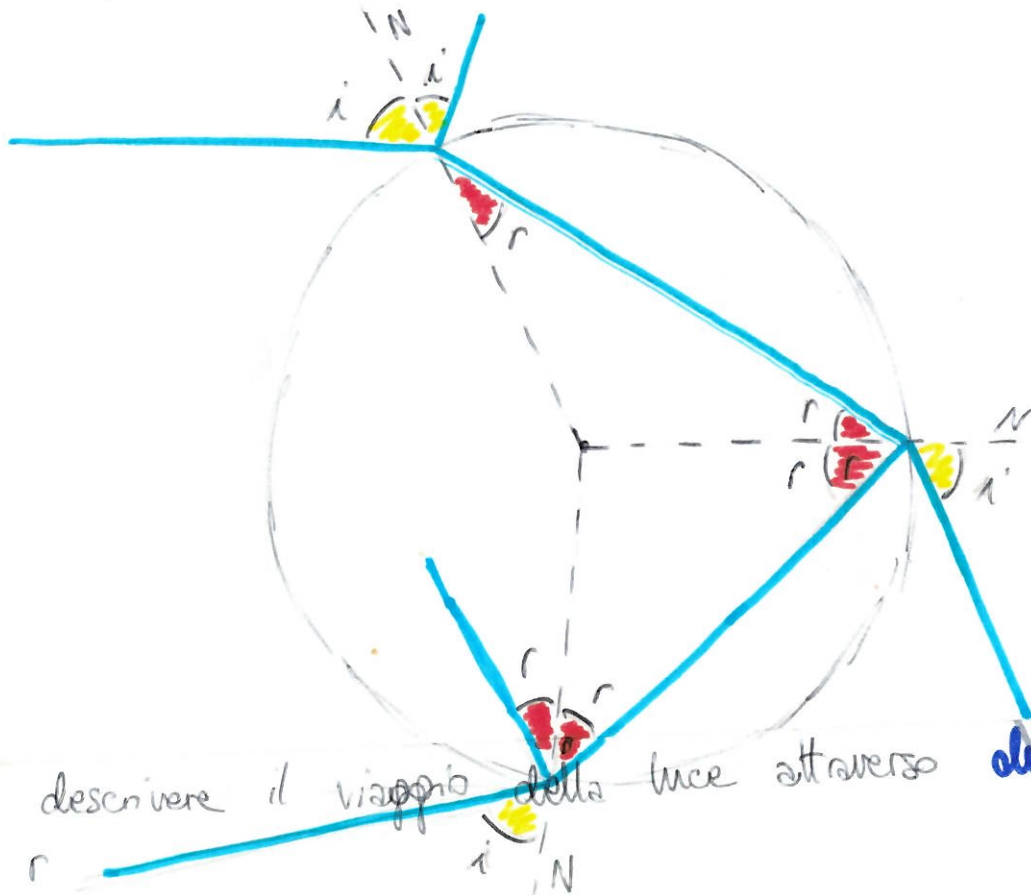
Quindi, rappresentiamo una goccia come una **sfera piena d'acqua**

Suppongo che i **raggi del sole** arrivino **paralleli**.

I raggi del sole sono di luce **bianca**, quindi passando nell'acqua si **dispersiono**.

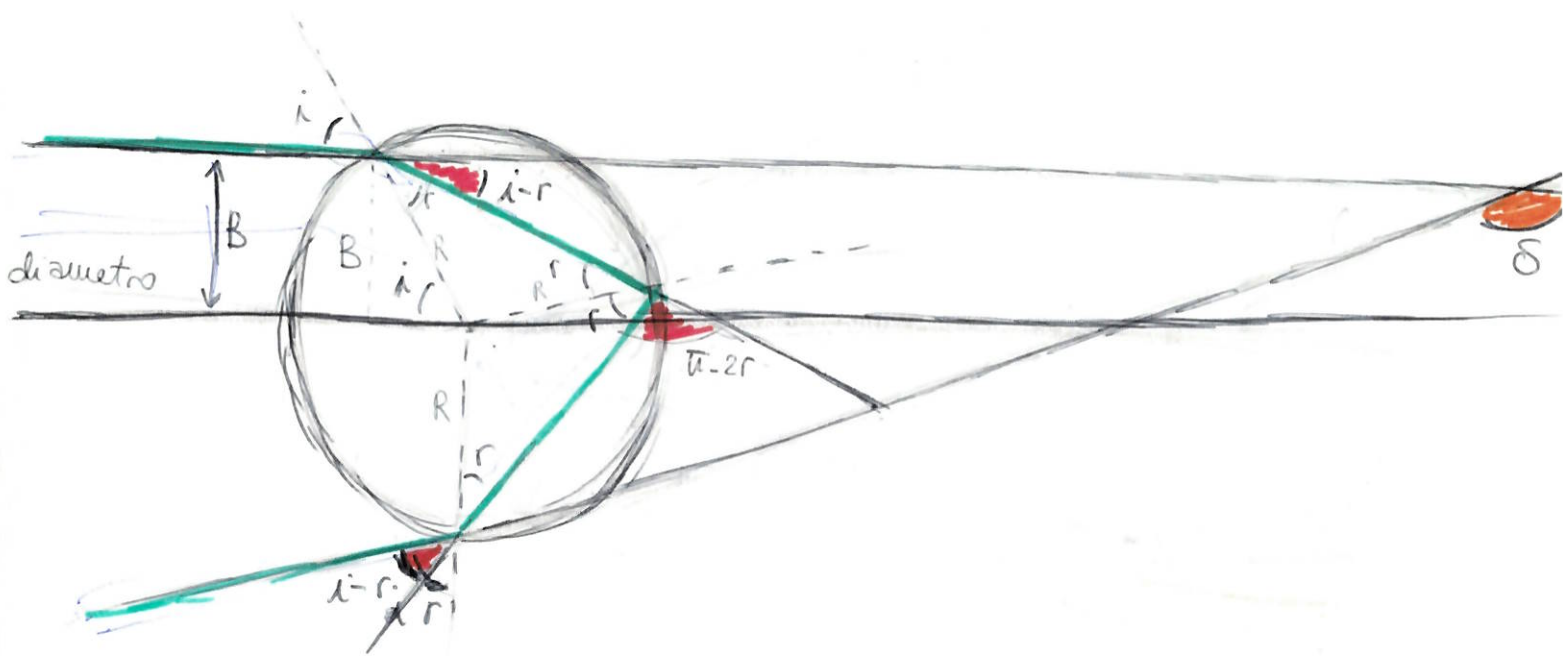
Ogni rifrazione e riflessione avvengono sullo **stesso piano**, quindi posso rappresentare il percorso della luce **bidimensionalmente**.

Un raggio di luce entra nella goccia \Rightarrow parte viene **riflessa** e parte **rifratta**. La parte rifratta viene poi in parte riflessa e in parte rifratta e cosi' via.



Posso descrivere il viaggio della luce attraverso **due soli angoli**:
 i e r

Di quanto viene deviato il raggio di luce dopo due rifrazioni e una riflessione?



$$\delta = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r) = \pi + 2i - 4r$$

Definisco il parametro d'impatto B come la distanza tra l'asse e il punto dove incide il raggio

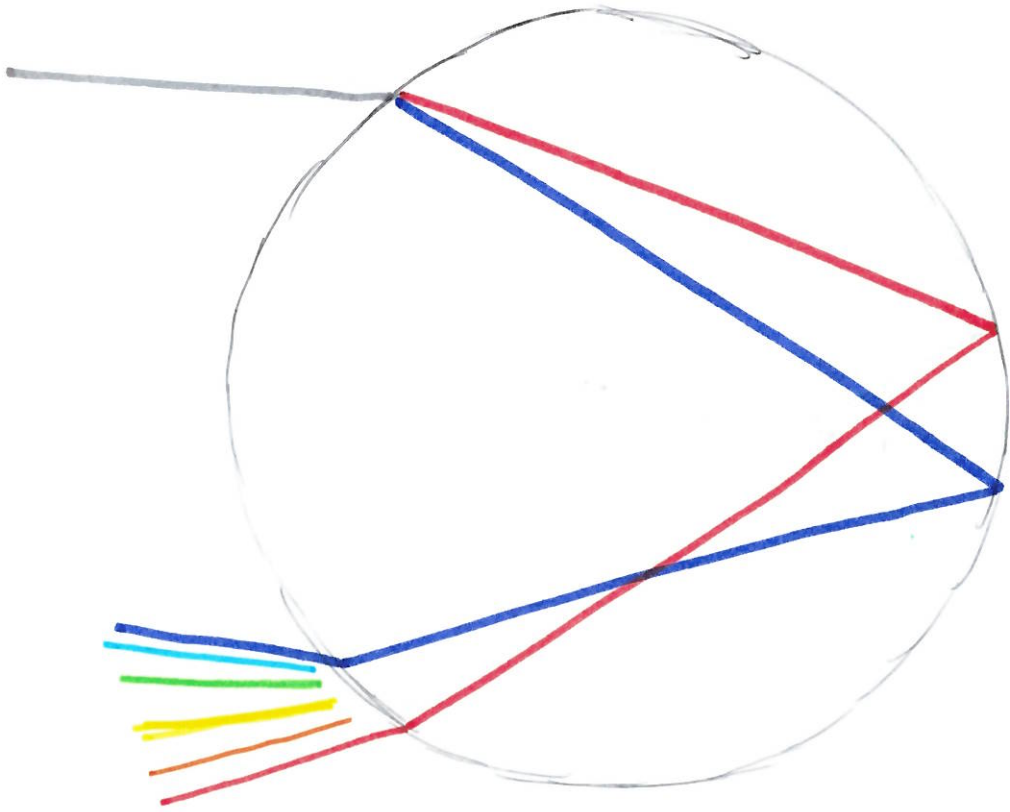
$$B = R \sin(i) \quad \text{con } R = \text{raggio goccia}$$

Chiamo $\beta = \frac{B}{R} = \sin i = n \sin(r)$ (considero l'indice di rifrazione dell'aria uguale a 1)
↑
legge di Snell

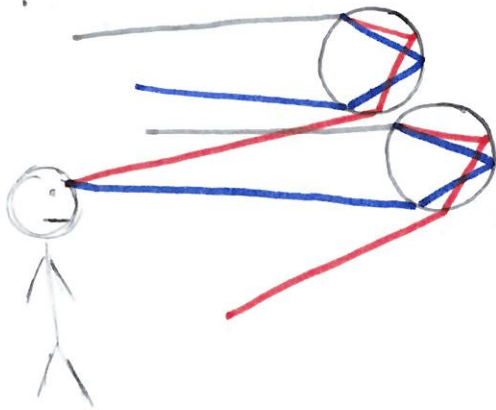
Allora,
$$\begin{cases} i = \arcsin \beta \\ r = \arcsin \left(\frac{\beta}{n} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta = \pi + 2 \arcsin \beta - 4 \arcsin \left(\frac{\beta}{n} \right)$$

$\Rightarrow \delta$ dipende da $n \Rightarrow$ dipende da λ



Per questo, dagli **strati superiori** delle gocce arriverà ai miei occhi **luce rossa**, da quelli **inferiori** arriverà **luce violetta**.

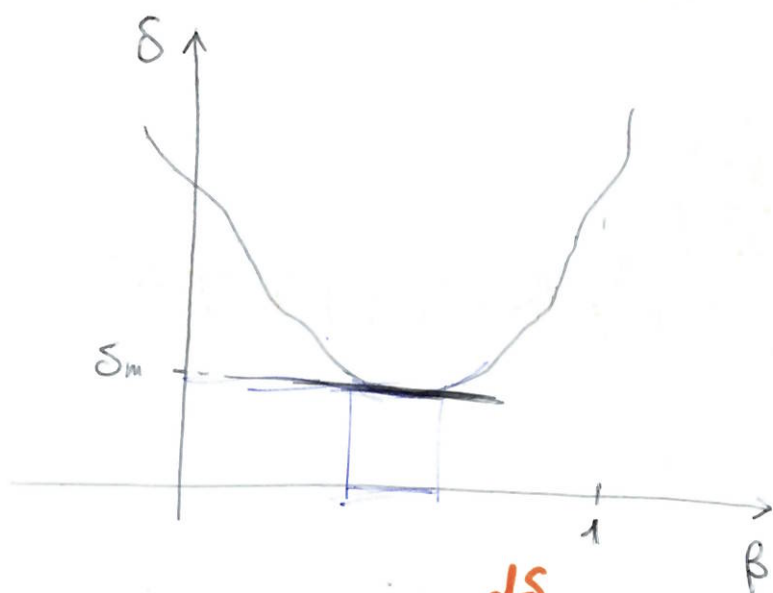


Ma ad ogni goccia non arriva solo un raggio di sole!
Arrivano tantissimi raggi!

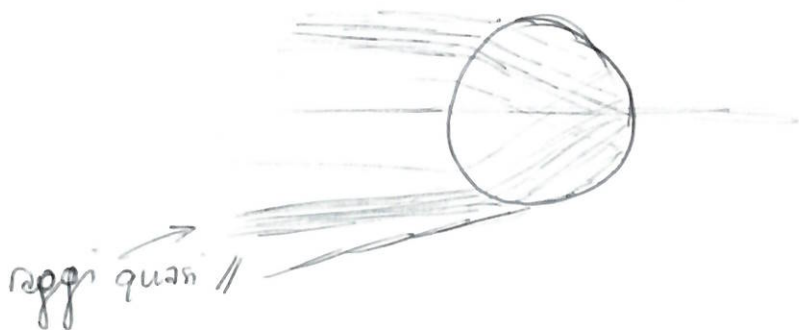
Quindi ho **tutti i possibili valori del parametro d'ingresso** il che significa che da tutte le gocce dovrebbe uscire un raggio rosso che arriva ai miei occhi!
Come faccio allora a vedere l'arcobaleno?

Esiste un **angolo di deviazione minima δ_m** , intorno al quale i **raggi** escono **quasi paralleli** (infatti nel grafico l'intorno di un minimo è piatto).

Poiché escono quasi paralleli, sono **meno soggetti ad attenuazione geometrica** e perciò a grande distanza si vedranno quasi solo loro.



Minimo: punto in cui $\frac{d\delta}{db} = 0$



Dimostriamo che ΔS_m esiste e calcoliamolo

$$\frac{dS}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} (\pi + 2i - 4r) = \frac{d}{d\beta} \left(\pi + 2 \arcsin \beta - 4 \arcsin \frac{\beta}{n} \right) =$$

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{4}{\sqrt{1-\frac{\beta^2}{n^2}}} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2^1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{4^2}{n \sqrt{1-\frac{\beta^2}{n^2}}}$$

$$\frac{1}{1-\beta^2} = \frac{4}{n^2 \left(1-\frac{\beta^2}{n^2}\right)}$$

$$n^2 - \beta^2 = 4 - 4\beta^2 \Rightarrow 3\beta^2 = 4 - n^2 \Rightarrow \beta^2 = \frac{4-n^2}{3}$$

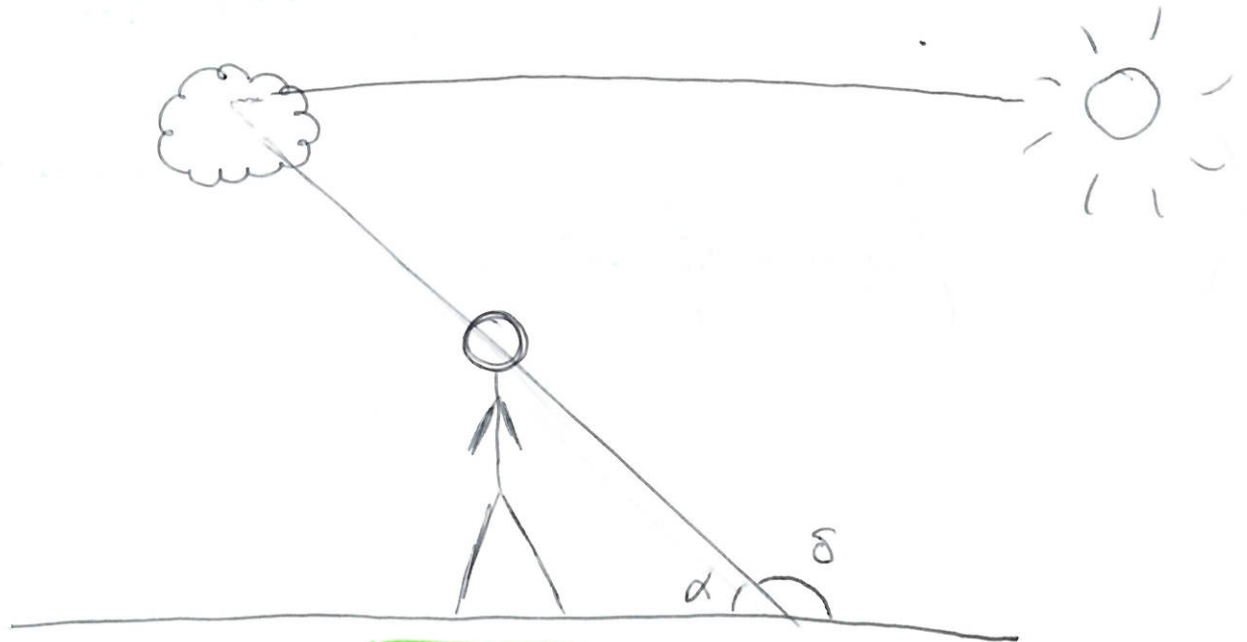
$$\Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

Per l'acqua, $\beta \approx 0,86$

Poiché ΔS_m dipende da n , ho un valore diverso per la luce rossa e quella violetta

$$S_{m \text{ medio}} = 138^\circ \quad \Delta S_m = 2^\circ$$

Per questo motivo mi arriva solamente un **cono** di raggi di luce dello stesso colore (vedo solo metà del cono perché poi c'è la superficie della Terra)



$\delta \approx 138^\circ \Rightarrow \alpha \approx 42^\circ$
 \Rightarrow vedo l'arcobaleno a circa 42° ~~spesso~~ ~~di~~ me.

A ~~volte~~ volte si vede anche l'**arcobaleno secondario**, dai colori invertiti.

Questo è prodotto ~~dei~~ ^{dai} raggi incidenti sulla **metà inferiore** della goccia.

Facendo calcoli analoghi a quelli per l'arcobaleno primario, scopri che vedo l'arcobaleno secondario a circa 50° ~~spesso~~ di me.

Poiché l'arcobaleno dipende dalla mia posizione rispetto al Sole, se mi sposto **si sposta** con me. Per questo l'arcobaleno è **fortemente soggettivo**.

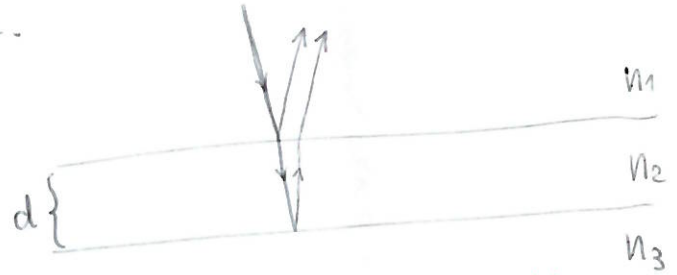
INTERFERENZA SU LAMINE SOTTILI

Considero una lamina con spessore d molto piccolo e indice di rifrazione n maggiore dell'aria.

La illumino in modo quasi normale ($\theta_i \approx 0$).

Parte della luce verrà **riflessa** dalla **prima superficie** della lamina, parte verrà **trasmessa** nella lamina e verrà poi in parte **riflessa** dalla **seconda superficie** della lamina.

La differenza di cammino è $2d$. Differenza di cammino **geometrico ottico**: $2dn_2$



Ricordando che ~~quando~~ quando la luce viene **riflessa** su una superficie oltre la quale c'è un mezzo con **indice di rifrazione maggiore**, il raggio si **sfasa** di π , distinguiamo due casi:

$n_2 > n_1, n_2 > n_3$

Allora l'onda riflessa dalla prima superficie si sfasa, quella riflessa dalla seconda superficie non si sfasa.

Per avere un **massimo** di interferenza devo imporre:

$2dn_2 = \frac{(2m+1)\lambda}{2}$

Per avere un **minimo** devo imporre

$2dn_2 = m\lambda$

$n_1 < n_2 < n_3$

Allora entrambi i raggi riflessi vengono sfasati.

Per avere un **massimo** devo imporre:

$2dn_2 = m\lambda$

Per avere un **minimo** devo imporre:

$2dn_2 = \frac{2m+1}{2}\lambda$

Spesso le lenti di vetro, per ridurre la riflessione, vengono rivestite da una lamina sottile trasparente.

CORPO NERO

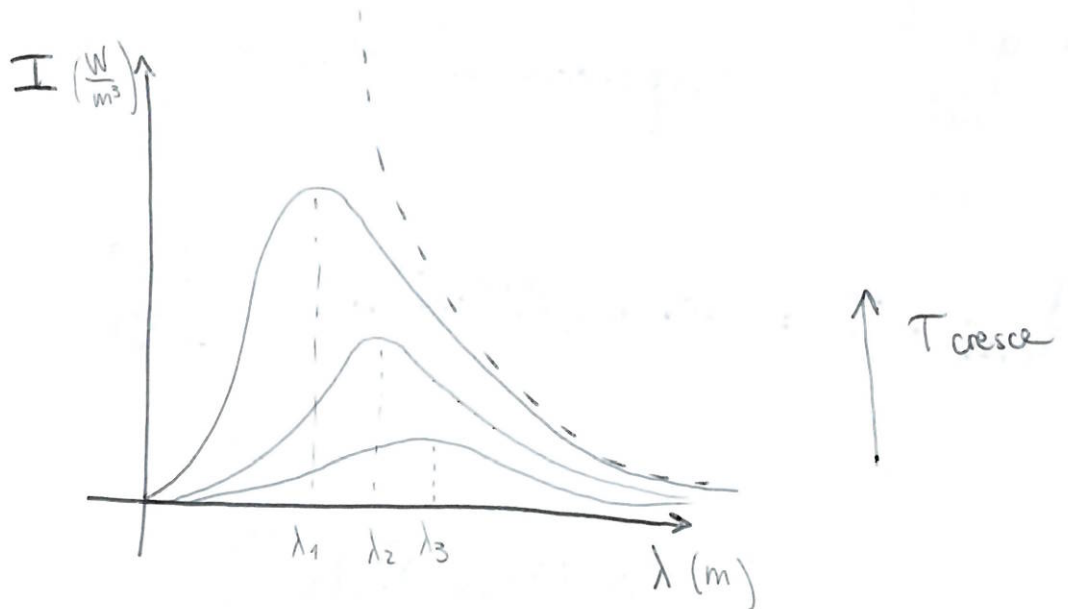
Il corpo nero è un **oggetto ideale** in grado di **assorbire** ed **emettere** qualsiasi radiazione, **senza rifletterne** alcuna.

È ben rappresentato da un **oggetto cavo** con un piccolo **foro** sulla superficie da cui entrano tutte le radiazioni.

Le **stelle** sono ottime approssimazioni di un corpo nero teorico.

A una temperatura $T > 0$ il corpo nero emette **onde elettromagnetiche**, secondo uno **spettro di emissione** come il seguente

seguito



Questo è contrario alle previsioni classiche, secondo le quali il corpo nero si sarebbe dovuto comportare come descritto dalla linea tatteggiata, arrivando al paradosso di un' emissione di energia infinita.

~~Integrale~~

Radiazione emessa tra due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 :

$$I_{\lambda_1, \lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I(\lambda) d\lambda$$

Radiazione totale emessa dal corpo nero:

$$I_{\text{Tot}} = \int_0^{\infty} I(\lambda) d\lambda = e \sigma T^4$$

LEGGE DI
STEFAN - BOLTZMANN

e = costante di emittività (=1 per un corpo nero)

σ = costante di Stefan-Boltzmann ($= 5,6705 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$)

L' **intensità** totale della radiazione, quindi, dipende solo dalla **temperatura**.

A ogni temperatura c'è un **picco di emittività** corrispondente a una determinata **lunghezza d'onda**, che diminuisce con l'aumentare della temperatura.

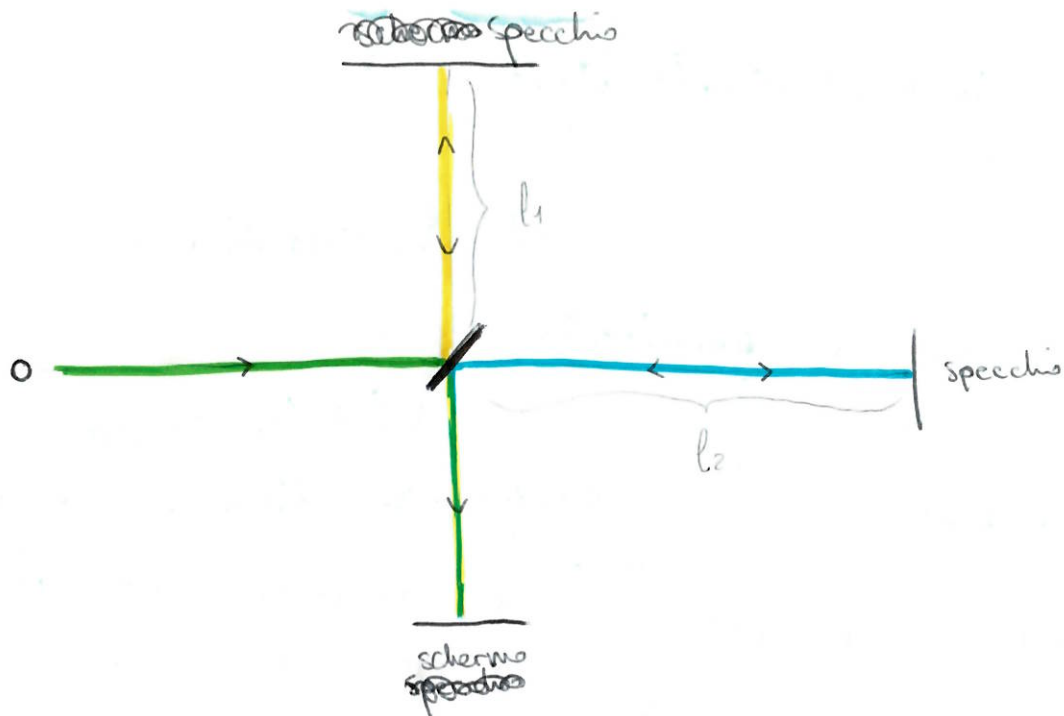
$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = \text{cost} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

LEGGE DI
WIEN

INTERFEROMETRO DI MICHELSON

È uno strumento in grado di generare una **differenza di fase** nello **stesso fascio di luce**.

È composto da uno **specchio semiriflettente** che scompone il ~~stesso~~ raggio proveniente dalla sorgente e da due **specchi** che riflettono i due raggi ottenuti su uno schermo.



I due bracci vengono percorsi due volte $\Rightarrow \Delta L = 2(l_2 - l_1)$

Differenza di fase: $\Delta \varphi = k \Delta L$

L'interferometro di Michelson fu usato per confermare che la velocità della luce non dipende dal sistema di riferimento nel

famosissimo esperimento di Michelson-Morley.

Posso anche fare sì che i due raji passino attraverso materiali diversi

$X_1 =$ cammino ottico attraverso $l_1 = 2 l_1 n_1$

$X_2 =$ cammino ottico attraverso $l_2 = 2 l_2 n_2$

Interferenza costruttiva: $X_1 = X_2 + m \lambda$

Interferenza distruttiva: $X_1 = X_2 + \left(\frac{2m-1}{2}\right) \lambda$

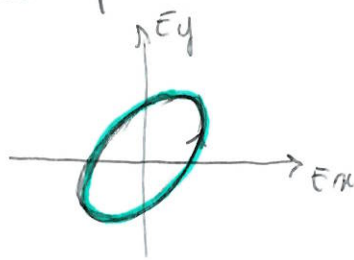
POLARIZZAZIONE DELLA LUCE

Le onde elettromagnetiche sono **onde trasversali**. La luce del sole generalmente **non** è **polarizzata**, perciò, se consideriamo un'onda piana che si propaga in direzione z ($\underline{E} = \underline{E}_0 \cos(kz - \omega t)$), possiamo **scomporla** nelle sue **componenti cartesiane** x e y

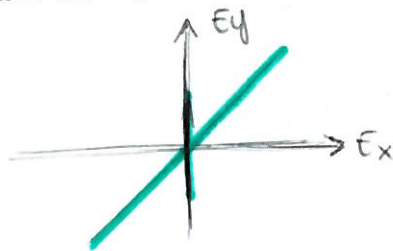
$$E : \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi) \end{cases}$$

Le componenti sono **sfasate** di un angolo φ .

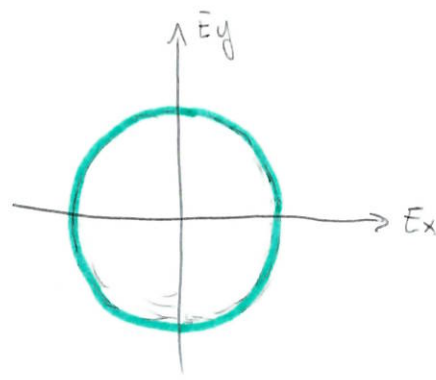
• Nel caso generale in cui $0 < \varphi < \pi$, la **POLARIZZAZIONE** è **ELLITTICA**, data dalla composizione di due moti armonici sfasati con stessa ampiezza. La pendenza dell'ellisse dipende da φ .



• Nel caso particolare $\varphi = 0$ ($+k\alpha$), la **POLARIZZAZIONE** è **LINEARE**. I massimi e i minimi delle due componenti corrispondono.



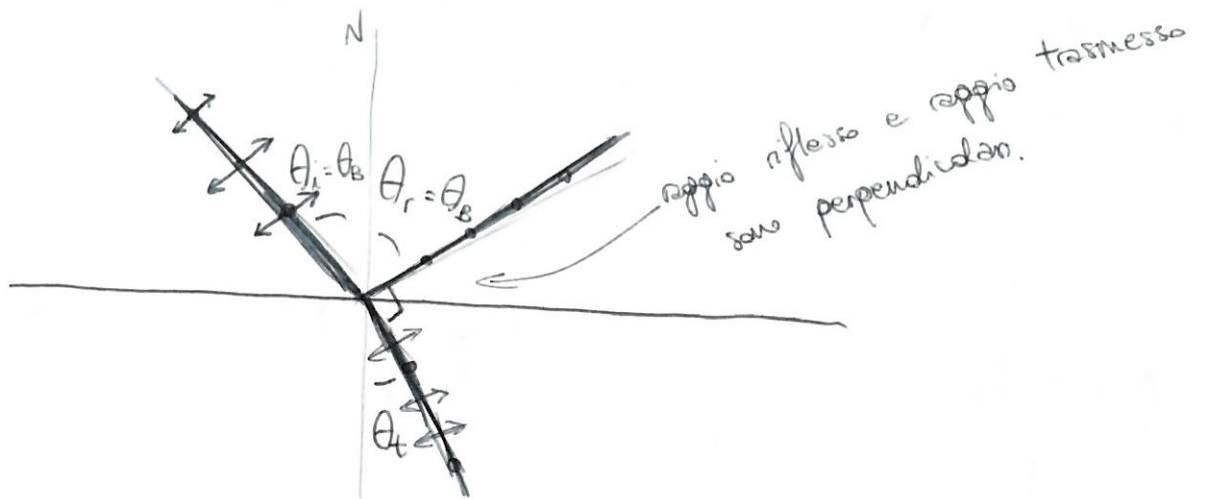
• Nel caso particolare $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la **POLARIZZAZIONE** è **CIRCOLARE**, data dalla composizione di due moti con stessa ampiezza e sfasati di $\frac{\pi}{2}$.



Polarizzazione per riflessione

La luce può essere polarizzata per **riflessione**, facendola incidere con un **angolo** $\theta_B = \frac{\pi}{2} - \theta_t$, chiamato **ANGOLO DI BREWSTER**.

In questo modo il **raggio riflesso** viene **totalmente polarizzato**.



legge di Snell: $n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right)$

$$\Rightarrow n_1 \sin \theta_B = n_2 \cos (\theta_B)$$

$$\Rightarrow \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

Polaroid

Il polaroid è un polarizzatore composto da **materiale diecrico**, capaci cioè di **assorbire** la componente luminosa in **una direzione** e far passare solo la componente polarizzata nella **direzione perpendicolare**.

È stato inventato nel 1929 da **Edwin Land**, che comprese che **stirando plasticamente** un materiale, le molecole si allineano e si orientano, acquisendo la capacità di far passare la luce polarizzata solo in una direzione.

Con una **coppia** di filtri diecrici possiamo ottenere un **attenuatore** (**polarizzatore**) di intensità variabile.

Infatti, colpendo con un'onda piana il primo filtro **ottenuto** un fascio di luce polarizzato lungo E_{\parallel} parallela all'asse del filtro. Se poi faccio passare il fascio di luce attraverso il secondo filtro (**analizzatore**), inclinato di un **angolo θ** rispetto al polarizzatore, da esso passerà solo la proiezione di E_{\parallel} lungo l'asse del polarizzatore.

Quindi, $E_f = E_{\parallel} \cos \theta$. Perciò, l'intensità finale sarà:

$$\boxed{I_f = I_{\parallel} \cos^2 \theta} \quad \begin{array}{l} \text{LEGGE DI} \\ \text{MALUS} \end{array}$$

Quindi, se $\theta = n\pi$, $I_f = I_{\parallel}$ intensità massima

$\theta = \frac{2n+1}{2} \pi$, $I_f = 0$ intensità minima

Nei casi intermedi, $0 < I_f < I_{\parallel}$

PACCHETTO D'ONDA

Finora abbiamo sempre trattato luce monocromatica o al massimo bicromatica. Ma la **luce bianca** e' data dalla **sovraposizione** delle diverse **onde monocromatiche** contenute nello **spettro del visibile**

Per trovare la **funzione d'onda** che descrive la **luce bianca** (o comunque una radiazione policromatica) devo **sommare tutte le sue componenti monocromatiche**. Dovro' perciò impostare

un **INTEGRALE**.

Per semplicita', sommo tra loro onde con la stessa ampiezza. Il risultato finale ~~non~~ dipende dai pesi delle componenti monocromatiche, ma non le sue proprietà generali.

Integro sulla frequenza perché essa non varia nel passaggio da un mezzo all'altro.

$$E = \frac{E_0}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(kz - \omega t) d\omega = \frac{E_0}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right) d\omega =$$

$$= \frac{E_0}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\left(\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) d\omega = \frac{E_0}{\Delta\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)} \left[\sin\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right) \right]_{\omega_1}^{\omega_2} =$$

$$= \frac{E_0}{\frac{\Delta\omega}{c}z - t} \left[\sin\left(\frac{\overbrace{\omega_2}^{k_2}}{c}z - \omega_2 t\right) - \sin\left(\frac{\overbrace{\omega_1}^{k_1}}{c}z - \omega_1 t\right) \right] =$$

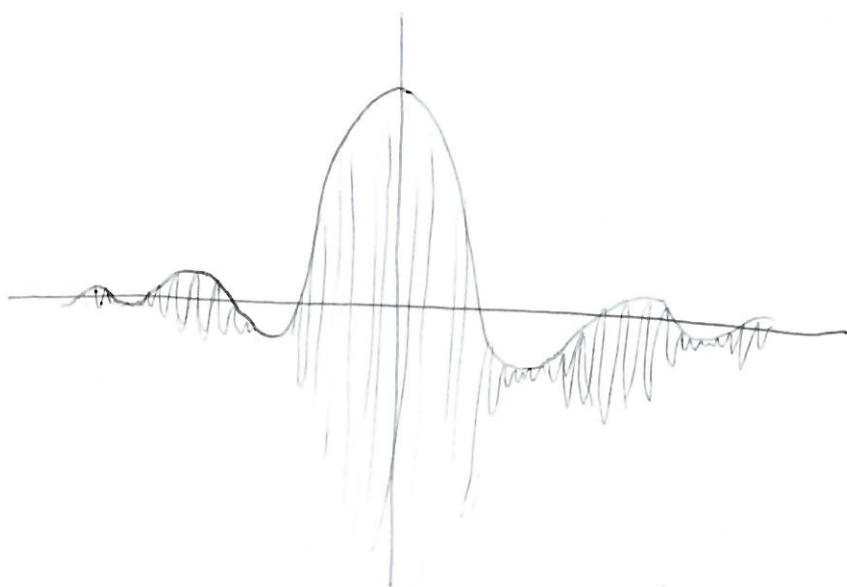
Prostaferesi: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$= \frac{2E_0}{\Delta\omega z - t} \cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}z - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{k_2-k_1}{2}z - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) =$$

$$= 2E_0 \frac{\sin\left(\frac{\Delta k}{2} z - \frac{\Delta \omega}{2} t\right)}{\frac{\Delta k}{2} z - \frac{\Delta \omega}{2} t} \cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t) =$$

$$= \boxed{E_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k}{2} z - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)} \quad \begin{array}{l} \text{PACCHETTO} \\ \text{D'ONDA} \end{array}$$

Composta da una **portante** con numero d'onda \bar{k} e frequenza $\bar{\omega}$ e ma **modulante** con la forma di un **seno cardinale**



Sostanzialmente limitata tra -2π e 2π

$t=0 \Rightarrow$ forma dell'onda nello spazio.

Regione entro la quale l'onda ha un'intensità significativamente $\neq 0$:

$$= \text{lunghezza di coerenza} = l_c = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

L'onda è localizzata nello spazio.

$z=0 \Rightarrow$ evoluzione temporale delle oscillazioni

tempo entro il quale l'intensità dell'onda nel punto $z=0$ è significativamente $\neq 0$:

$$= \text{tempo di coerenza} = t_c = \frac{4\pi}{\Delta \omega}$$

L'onda è localizzata nel tempo.

velocità pacchetto d'onda nel vuoto: $v_f = v_g = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{l_c}{t_c}$ (In un mezzo dispersivo $v_g < v_f$)