

Qualche appunto di Onde e Oscillazioni

M. Radaelli

30 gennaio 2018

Indice

I	Oscillatori a un grado di libertà	3
1	Oscillatore armonico semplice	3
1.1	Approssimazioni	3
1.2	Punto di equilibrio	4
1.3	Equazione dell'oscillatore semplice	4
1.4	Risoluzione dell'equazione dell'oscillatore semplice	4
1.5	Condizioni iniziali	5
1.6	Considerazioni energetiche	6
1.7	Generalizzazione del problema	6
2	Oscillatore armonico smorzato	7
2.1	Risoluzione dell'equazione	7
2.2	Condizioni iniziali	8
2.3	Considerazioni energetiche	9
3	Oscillatore forzato	9
3.1	Risoluzione dell'equazione	9
3.2	Risonanza	11
3.3	Considerazioni energetiche	12
4	Complementi	12
4.1	Molle in serie e in parallelo	12
4.2	Oscillatore su cui agisce la forza peso	12
II	Oscillatori a infiniti gradi di libertà	13
5	Introduzione al modello	14
5.1	Approssimazioni	14
5.2	Equazione di D'Alembert	14
5.3	Risoluzione dell'equazione di D'Alembert per corde fissate agli estremi	15
5.3.1	Corda vincolata ad entrambi gli estremi	15
5.3.2	Corda vincolata ad un solo estremo	17
5.4	Velocità di fase	17

<i>INDICE</i>	2
6 Trasporto di energia sulla corda	19
6.1 Oscillatore come eccitatore di un'onda	20
7 Cambio di mezzo di propagazione	20
8 Cenni di analisi di Fourier	22
III Acustica	23
9 Costruzione del modello	23
9.1 Approssimazioni	23
9.2 Equazione di d'Alembert in un fluido	23
9.3 Un modello termodinamico per il suono	24
9.3.1 Modello di Newton	24
9.3.2 Modello di Laplace	25
10 Propagazione del suono nei liquidi e nei solidi	26
11 Un modello tridimensionale per il suono	27
11.1 Potenza e intensità di un'onda acustica	27
11.2 Propagazione tridimensionale del suono	27
11.3 Fenomeni di attenuazione geometrica e per assorbimento	28
11.4 Percezione della radiazione acustica	29
11.5 Effetto Doppler	29
11.5.1 La sorgente è in movimento	29
11.5.2 Il ricevente è in movimento	30
IV Fenomeni specificamente ondulatori	30
12 Interferenza di onde congruenti sfasate	30
13 Interferenza di onde con frequenze prossime (battimenti)	31
14 Interferenza di onde per differenza di cammino	32
V Ottica	33
15 Ottica geometrica	33
15.1 Principio di Fermat	33
15.2 Principio di Huygens	34
15.3 Legge di Snell-Cartesio	34
15.3.1 Dimostrazione a partire dal principio di Fermat	34
15.3.2 Dimostrazione a partire dal principio di Huygens	36
15.4 Legge della riflessione	36
15.4.1 Dimostrazione a partire dal principio di Fermat	36
15.4.2 Dimostrazione a partire dal principio di Huygens	37
15.5 Costruzione dell'immagine	38
15.5.1 L'approssimazione parassiale	38

15.5.2	Diottro piano	38
15.5.3	Diottro sferico	39
15.5.4	Lente	41
15.5.5	Specchio piano	42
15.5.6	Specchio curvo	42
15.6	Complementi	43
15.6.1	Il telescopio di Keplero	43
16	Ottica fisica	43
16.1	Interferenza su lamine sottili	44
16.2	Diffrazione	45
16.3	Interferenza alla Young	46
16.4	Reticoli di diffrazione	47
16.5	Polarizzazione	49
16.6	Dispersione cromatica	50

Introduzione

Questi sono gli appunti da me trascritti del corso di Onde e Oscillazioni tenuto dal prof. Vailati nel corso dell'A.A. 2016-17. Ringrazio per la segnalazione di eventuali errori.

Parte I

Oscillatori a un grado di libertà

1 Oscillatore armonico semplice

L'oscillatore *armonico* costituisce un modello di estremo interesse nello studio di molteplici campi della Fisica. Partiamo però dal definire il più semplice modello di oscillatore armonico: il *sistema massa-molla*. Supponiamo di avere una molla avente costante elastica k , cui è agganciata una massa m . Supponiamo per il momento che il sistema sia montato in orizzontale (la correzione per i sistemi verticali sottoposti alla forza di gravità sarà proposta in seguito).

1.1 Approssimazioni

Per lo studio di questo modello eseguiamo le seguenti approssimazioni:

- La massa è completamente concentrata in un punto, che può essere considerato come *punto materiale*, dunque si trascurano rotazioni e simili;
- La molla ha massa nulla e ha in tutto il suo percorso un comportamento perfettamente lineare (cioè rispondente alla legge di Hooke).
- La massa è libera di scorrere su un piano in totale assenza di attrito.

1.2 Punto di equilibrio

Si definisce in generale "punto di equilibrio" una posizione nello spazio tale che un punto materiale che vi si trovi con velocità nulla sia sottoposto a forze aventi risultante nulla. Dal punto di vista matematico, si tratta di un punto di minimo della funzione energia potenziale:

$$\nabla U = 0 \quad (1.2.1)$$

Il punto di equilibrio del sistema massa-molla è allora quello in cui la forza esercitata dalla molla si annulla. Vista la legge di Hooke:

$$F = -k \cdot (x - x_0) \quad (1.2.2)$$

Abbiamo che il punto di equilibrio si ha per $x = x_0$.

1.3 Equazione dell'oscillatore semplice

Supponiamo ora di avere una molla avente costante elastica k cui è agganciata una massa m . Fissiamo il sistema di riferimento in modo che nella posizione di equilibrio si abbia: $x = 0$. Scriviamo la seconda legge della dinamica:

$$F = m \cdot a \quad (1.3.1)$$

e uguagliamo alla forza ricavata da Hooke:

$$m \cdot a = -k \cdot x \quad (1.3.2)$$

Esprimendo l'accelerazione come derivata seconda della posizione nel tempo otteniamo l'equazione differenziale:

$$m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + k \cdot x = 0 \quad (1.3.3)$$

Ovvero, usando un formalismo più comodo e diffuso:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \quad (1.3.4)$$

1.4 Risoluzione dell'equazione dell'oscillatore semplice

Vogliamo ora risolvere l'equazione (1.3.4). Si tratta di una equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Prima di tutto dividiamo per la massa e diamo un nuovo nome al parametro $\frac{k}{m} = \omega^2$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.4.1)$$

L'equazione caratteristica della (1.4.1) ha dunque forma:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (1.4.2)$$

che ha soluzione:

$$\lambda = \pm i\omega \quad (1.4.3)$$

Dunque la soluzione dell'equazione è della forma:

$$x(t) = e^{\pm i\omega t} \quad (1.4.4)$$

Ovvero:

$$x(t) = \cos \omega t \quad (1.4.5)$$

$$x(t) = \sin \omega t \quad (1.4.6)$$

Come è noto dalla teoria delle equazioni differenziali, una generica soluzione dell'equazione è data da una qualsiasi combinazione lineare delle precedenti. Allora:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t \quad (1.4.7)$$

1.5 Condizioni iniziali

Imponiamo nella (1.4.7) le condizioni iniziali del moto. Supponiamo in particolare che a tempo $t = 0$ la massa si trovi nella posizione x_0 . Inseriamo nell'equazione:

$$x(0) = A = x_0 \quad (1.5.1)$$

Deriviamo ora la funzione per valutare la relazione con la velocità iniziale v_0 .

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \quad (1.5.2)$$

Segue:

$$v(0) = v_0 = B\omega \quad (1.5.3)$$

Quindi, inserendo le relazioni appena individuate nella (1.4.7):

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \quad (1.5.4)$$

Questa forma resta però piuttosto scomoda da applicare. Vogliamo ricondurla a qualcosa di più semplice, della forma:

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi) = C \cos(\omega t) \cos(\phi) - C \sin(\omega t) \sin(\phi) \quad (1.5.5)$$

Eguaglio alla (1.5.2):

$$C \cos \phi = x_0 \quad (1.5.6)$$

$$-C \sin \phi = \frac{v_0}{\omega} \quad (1.5.7)$$

Risolvero il sistema dividendo le equazioni membro a membro:

$$\tan \phi = \frac{-v_0}{\omega x_0} \quad (1.5.8)$$

$$\phi = \arctan \frac{-v_0}{\omega x_0}$$

Ricaviamo invece il valore di C elevando al quadrato ciascuna equazione e sommando membro a membro:

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (1.5.9)$$

1.6 Considerazioni energetiche

Resta da verificare la conservatività dell'oscillatore armonico. In effetti, essa è garantita dal fatto che l'unica forza agente (la forza elastica) sia conservativa. Sia K l'energia cinetica, U l'energia potenziale elastica.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.6.1)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.6.2)$$

$$\begin{aligned} E = U + K &= \frac{1}{2}mC^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kC^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \\ &= \frac{1}{2}kC^2(\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)) = \\ &= \frac{1}{2}kC^2 \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Quindi l'energia totale *non* è funzione del tempo: il sistema, come ci aspettavamo, è conservativo.

1.7 Generalizzazione del problema

Come avevamo anticipato, l'oscillatore armonico è un modello estremamente potente perché permette di studiare un gran numero di casi reali. Consideriamo in particolare un generico sistema fisico a un grado di libertà dotato di un punto di *equilibrio stabile*. Abbiamo allora che la funzione energia potenziale ha questo comportamento, sviluppando secondo Taylor nel punto di equilibrio (dove centro per comodità il sistema di riferimento):

$$U(x) = U(0) + \frac{dU}{dx}(0)x + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}(0)x^2 \quad (1.7.1)$$

Ma è noto che il punto $x = 0$ è punto di minimo dell'energia potenziale (perché è punto di equilibrio stabile). Inoltre $U(0)$ è una costante arbitraria. Quindi:

$$\frac{d^2U}{dx^2}(0) = k > 0 \quad (1.7.2)$$

Ma è nota la relazione:

$$F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow \frac{dF}{dx} = -k \Rightarrow F = \int_0^x (-k)dx = -kx \quad (1.7.3)$$

Il discorso si può generalizzare ad una situazione tridimensionale. Per definizione di punto di equilibrio abbiamo:

$$\nabla(U) = 0 \quad (1.7.4)$$

Sviluppando secondo Taylor si ricava una dipendenza dal termine di secondo ordine, poiché

$$U(x) = U(0) + \langle \nabla U, x \rangle + \langle {}^T x, H(U)(0) \cdot x \rangle \quad (1.7.5)$$

2 Oscillatore armonico smorzato

Il modello di oscillatore armonico che abbiamo fino ad ora utilizzato ha un fondamentale difetto: il tempo in esso non ha una direzione preferenziale di scorrimento. Fisicamente questo comportamento è impossibile. Vogliamo allora costruire un modello più raffinato, che sia in grado di tenere conto della presenza di una forza di *attrito* direttamente proporzionale alla velocità. Il bilancio delle forze risulta allora:

$$F = -kx - 2\gamma mv \quad (2.0.1)$$

Dove γ è detta *costante di smorzamento* e ha le dimensioni dell'inverso di un tempo. Giungiamo così all'equazione di moto:

$$m\ddot{x} + 2\gamma m\dot{x} + kx = 0 \quad (2.0.2)$$

2.1 Risoluzione dell'equazione

L'equazione che abbiamo scritto precedentemente ((2.0.2)) è ancora una equazione lineare omogenea. Anche qui dividiamo per m e definiamo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x \quad (2.1.1)$$

Scriviamo il suo polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.1.2)$$

L'individuazione delle radici di questo polinomio merita qualche attenzione in più. Sia infatti Δ il discriminante del medesimo. Si pongono tre casi:

- $\Delta > 0$ Il polinomio presenta due radici reali:

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2.1.3)$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2.1.4)$$

In questo caso non si ha una soluzione oscillante (essa dovrebbe essere necessariamente complessa). Il moto è dunque *aperiodico* e si parla di *moto sovrasmorzato*.

- $\Delta = 0$ Il polinomio presenta una doppia radice reale della forma:

$$\lambda = -\gamma \quad (2.1.5)$$

Le soluzioni dell'equazione sono conseguentemente della forma:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t} \quad (2.1.6)$$

Anche in questo caso evidentemente si tratta di soluzioni non oscillanti. Il moto in questo caso si dice in *condizione di smorzamento critico*.

- $\Delta < 0$ Questo caso è quello maggiormente interessante, di cui ci occuperemo da qui in avanti.

Discutiamo ora la risoluzione dell'equazione nel terzo caso, quello propriamente oscillatorio. Definiamo la quantità $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ¹. Allora la soluzione più generale ha forma:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t - i\omega t} + Be^{-\gamma t + i\omega t} = e^{-\gamma t}[A \cos \omega t + B \sin \omega t] \quad (2.1.7)$$

Vogliamo ora riscrivere la (2.1.7) in modo più semplice, nella forma:

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \quad (2.1.8)$$

Ricaviamo le relazioni tra i parametri che giustificano una tale equivalenza. Per questo ragionamento è più comodo utilizzare la scrittura delle funzioni trigonometriche come esponenziali complessi. Per la relazione di Eulero:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \frac{Ce^{i\phi} e^{i\omega t} + Ce^{-i\phi} e^{-i\omega t}}{2} \quad (2.1.9)$$

da cui:

$$A = \frac{Ce^{i\phi}}{2} \quad (2.1.10)$$

$$B = \frac{Ce^{-i\phi}}{2} \quad (2.1.11)$$

2.2 Condizioni iniziali

Abbiamo dunque la relazione descritta dall'equazione:

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

e vogliamo ricavarne la dipendenza dalle condizioni iniziali. Imponiamo dunque $x(0) = x_0$ e $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$.

$$x(0) = C \cos \phi \quad (2.2.1)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = C[-\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) - e^{-\gamma t} \omega \sin(\omega t + \phi)] \quad (2.2.2)$$

$$v(0) = C[-\gamma \cos \phi - \omega \sin \phi] \quad (2.2.3)$$

Vogliamo ora invertire le relazioni per valutare la dipendenza dei parametri dalle condizioni iniziali:

$$\frac{v_0}{x_0} = -\gamma - \omega \tan \phi \Rightarrow \tan \phi = \frac{\frac{v_0}{x_0} + \gamma}{\omega} \Rightarrow \phi = \arctan \frac{\frac{v_0}{x_0} + \gamma}{\omega} \quad (2.2.4)$$

Ricaviamo ora invece la dipendenza di C dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} v_0 &= C[-\gamma \cos \phi - \omega \sin \phi] = -\gamma x_0 - C\omega \sin \phi \\ &\Rightarrow v_0 + \gamma x_0 = -C\omega \sin \phi \\ &\Rightarrow -C \sin \phi = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}\right)^2 &= C^2 \cos^2 \phi + C^2 \sin^2 \phi = C^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = C^2 \\ &\Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2 + \gamma^2 x_0^2 + 2v_0 \gamma x_0}{\omega^2}} \end{aligned}$$

¹Si osservi che il simbolo ω ha qui un significato diverso da quello che gli abbiamo assegnato nel caso dell'oscillatore semplice. Daremo in seguito maggiori spiegazioni.

Osservazione I.1. Osserviamo che nell'equazione (2.2.5) si ha che se il moto è debolmente smorzato, cioè se $\gamma \ll \omega_0$ le condizioni equivalgono a quelle del moto oscillatorio libero ricavate nella (1.5.9).

2.3 Considerazioni energetiche

Vogliamo ricavare l'andamento dell'energia meccanica complessiva del sistema nel tempo.

$$E = U + K = \frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}C^2e^{-2\gamma t}[k \cos(\omega t + \phi) + m(\gamma \cos(\omega t + \phi) + \omega \sin(\omega t + \phi))^2] \quad (2.3.1)$$

Ci mettiamo ora nella condizione di ragionare con un moto *debolmente smorzato*. In questo caso, poiché $\gamma \ll \omega_0$ si ha che $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \sim \omega_0$. Di conseguenza la relazione si può semplificare:

$$E \sim \frac{1}{2}C^2e^{-2\gamma t}[k \cos^2(\omega t + \phi) + m\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2}kC^2e^{-2\gamma t} = U_0e^{-2\gamma t} \quad (2.3.2)$$

E' piuttosto evidente che in questo caso l'energia meccanica totale è una funzione (decrescente) del tempo. Di conseguenza il moto di un oscillatore smorzato *non* è conservativo.

Osservazione I.2. In realtà la semplificazione dei calcoli che abbiamo effettuato mostra alcuni punti di debolezza anche in condizioni di debole smorzamento. In particolare, si osservano discrepanze avvertibili nei punti di estremo dell'oscillazione (vedi immagine di seguito).

3 Oscillatore forzato

Vogliamo ora occuparci dell'oscillatore *smorzato forzato*. Si tratta di un oscillatore analogo al precedente ma che questa volta è soggetto ad una forza, denominata *forzante*. Abbiamo dunque una equazione di moto della forma:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m} \quad (3.0.1)$$

In particolare, ci interessano quei casi in cui F è una funzione *periodica*. Abbiamo dunque una equazione della forma:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (3.0.2)$$

3.1 Risoluzione dell'equazione

Ci proponiamo a questo punto di risolvere l'equazione del moto dell'oscillatore forzato (3.0.2). Essa è una equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari sappiamo che

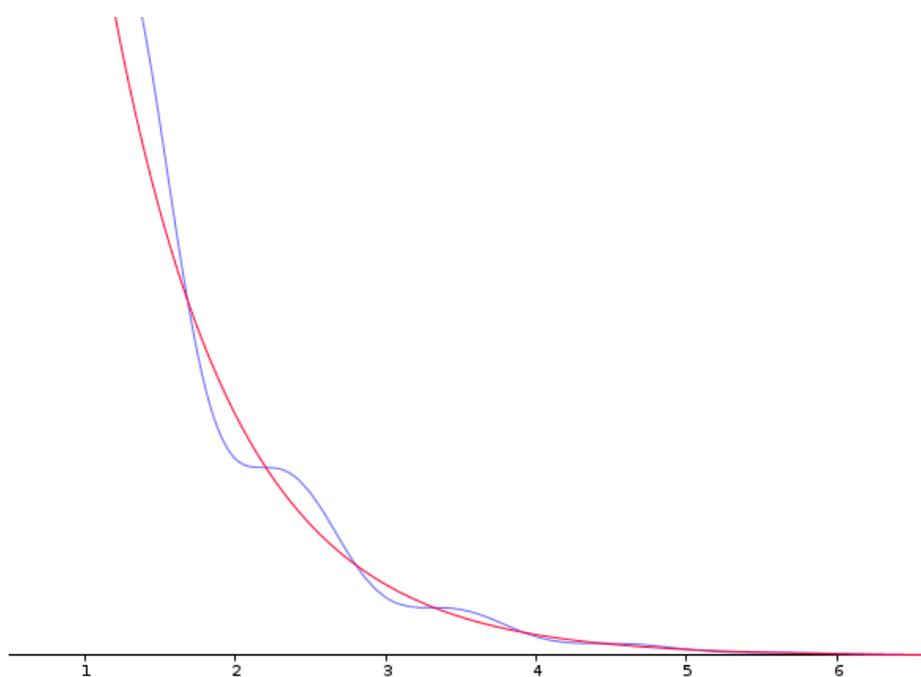


Figura 1: In blu l'andamento dell'energia calcolato senza approssimare, in rosso l'andamento approssimato. Osservare le discrepanze, specialmente negli estremi di oscillazione. Plot eseguito con GeoGebra.

una sua soluzione è data da una qualunque combinazione lineare delle soluzioni dell'equazione omogenea associata sommata ad una soluzione particolare dell'equazione completa. Come soluzione particolare $x_P(t)$ scegliamo una soluzione per $t \gg \frac{1}{\gamma}$, cioè una soluzione non transitoria. In questo caso si ha che: $x_P(t) = B \cos(\omega t + \phi)$ ². Imponiamo che $x_P(t)$ risolva l'equazione:

$$\begin{aligned} -B\omega^2 e^{i\omega t + i\phi} + 2B\gamma\omega i e^{i\omega t + i\phi} + B\omega_0^2 e^{i\omega t + i\phi} &= \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \\ \Rightarrow B(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) &= \frac{F_0}{m} e^{-i\phi} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Imponiamo che l'uguaglianza valga in particolare per i moduli quadri:

$$\begin{aligned} B^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2] &= \frac{F_0^2}{m^2} \\ \Rightarrow B &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Imponiamo ora che valga l'uguaglianza sia per la parte reale che per quella immaginaria.

$$B(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m} \cos \phi \quad (3.1.3)$$

$$2B\gamma\omega = -\frac{F_0}{m} \sin \phi \quad (3.1.4)$$

Da cui:

$$\phi = -\arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.1.5)$$

Dunque in particolare la fase per grandi tempi *non* dipende dalla condizione iniziale.³

3.2 Risonanza

Abbiamo visto con l'equazione (3.1.1) che l'ampiezza del moto è funzione della pulsazione. Si dice *risonanza* la condizione di massima ampiezza dovuta alla coincidenza tra ω e ω_0 . La pulsazione di risonanza coincide con il massimo della curva descritta dalla (3.1.1) (detta *lorenziana*).

Osservazione I.3. *Se nell'equazione (3.1.1) poniamo $\gamma = 0$ abbiamo che per $\omega \rightarrow \omega_0$ il valore dell'ampiezza diverge. Questa è la ragione per cui per le strutture la risonanza è un fenomeno così pericoloso: in presenza di uno smorzamento non molto significativo l'ampiezza dell'oscillazione può diventare così grande da distruggere l'oscillatore.*

²Ancora una volta cambiamo il significato di ω , che qui diventa la pulsazione della forzante.

³Non ci interessiamo qui al calcolo della soluzione generale dell'equazione, ma ci limitiamo a quella per tempi lunghi.

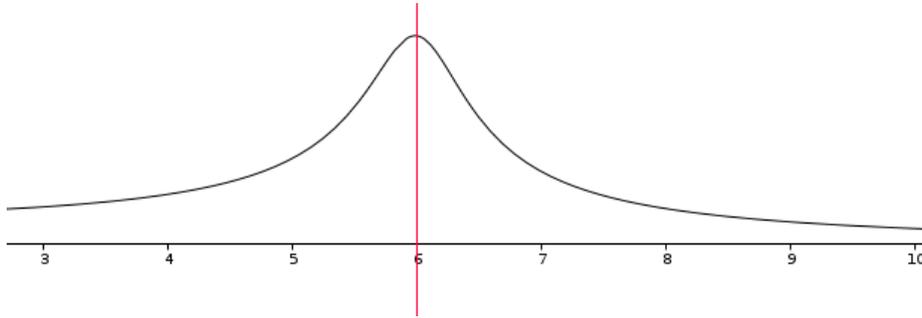


Figura 2: Una curva lorentziana. Sulle ordinate l'ampiezza del moto, sulle ascisse il valore della pulsazione della forzante. In rosso è riportata la pulsazione propria ω_0 del sistema. Plot eseguito con GeoGebra.

3.3 Considerazioni energetiche

Anche qui scegliamo, per semplicità, di ragionare su tempi lunghi. Vogliamo al solito valutare l'andamento dell'energia nel tempo.

$$\begin{aligned} E = U + K &= \frac{1}{2}kB^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2 B^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \\ &= \frac{1}{2}mB^2 [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos^2(\omega t + \phi) + \omega^2] \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

4 Complementi

In questa sezione riportiamo alcuni argomenti sparsi, trattati specialmente durante le esercitazioni, che risultano però di notevole rilevanza per la nostra trattazione.

4.1 Molle in serie e in parallelo

- Molle in parallelo. Questo caso si ha quando entrambe le molle sono agganciate ad un punto di appoggio statico. Le molle in questo caso si allungano della stessa quantità x . Si ha dunque:

$$F = F_1 + F_2 = k_1x + k_2x = x(k_1 + k_2) \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (4.1.1)$$

- Molle in serie. Una molla è agganciata ad un estremo (libero) dell'altra. L'allungamento complessivo s è la somma degli allungamenti. Inoltre le forze sono uguali, altrimenti avrei una situazione non statica:

$$s = s_1 + s_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \Rightarrow k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \quad (4.1.2)$$

4.2 Oscillatore su cui agisce la forza peso

Applichiamo all'oscillatore armonico semplice una variazione, considerando l'azione sulla massa della forza peso. L'equazione del moto diventa allora:

$$m\ddot{x} + kx - mg = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2x = g \quad (4.2.1)$$

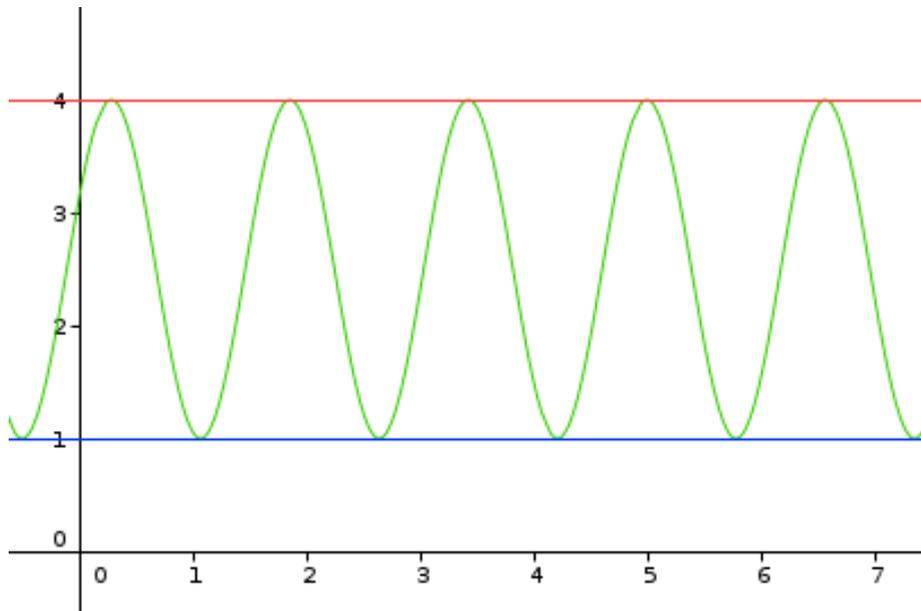


Figura 3: L'andamento dell'energia in un oscillatore forzato è rappresentato in verde. Tale curva è racchiusa dall'energia propria dell'oscillatore libero (blu) e quella di un ipotetico oscillatore libero avente la pulsazione della forzante (rosso). Plot eseguito con GeoGebra.

Questa è una equazione lineare non omogenea. Sappiamo che una sua soluzione è data da una qualsivoglia combinazione lineare delle soluzioni della omogenea sommata ad una soluzione particolare della equazione di partenza. Scegliamo in particolare come soluzione particolare la soluzione stazionaria, cioè quella $x(t)$ funzione costante tale per cui $kx = mg$. Tale soluzione particolare è dunque $x_P(t) = \frac{mg}{k}$. Inserendola nell'equazione si può verificare in modo ovvio il suo essere soluzione. La soluzione generale è allora della forma:

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k} \quad (4.2.2)$$

che si traduce di fatto in una traslazione del punto di equilibrio. E' quindi conveniente spostare il sistema di riferimento in modo da centrarlo sul nuovo punto di equilibrio.

Parte II

Oscillatori a infiniti gradi di libertà

Vogliamo ora occuparci del modello della *corda vibrante*. Esso è infatti un efficace modello per l'analisi delle *onde meccaniche*.

5 Introduzione al modello

5.1 Approssimazioni

Per poter effettuare uno studio sufficientemente semplice del modello della corda vibrante è necessario eseguire alcune approssimazioni rispetto alla corda reale. In particolare, introduciamo le seguenti.

- La corda è perfettamente elastica, la stessa tensione T_0 è avvertita in ogni punto della corda.
- La corda è perfettamente flessibile, non si perde energia per forzare la curvatura.
- La densità lineare ρ è perfettamente uniforme e costante nel tempo.
- La corda non subisce l'attrazione di gravità. Di fatto, questo significa che l'eventuale attrazione di gravità è molto più piccola della tensione della corda.
- La corda è soggetta a sole perturbazioni *trasversali* che avvengono in un solo piano (*polarizzate*).
- La perturbazione ψ cui è sottoposta la corda è piccola. Cioè, posta la corda lungo l'asse z , si ha che $\frac{\Delta\psi}{\Delta z} \ll 1$.

5.2 Equazione di D'Alembert

Vogliamo ora ricavare la legge che governa la propagazione di una perturbazione sulla corda. Iniziamo con il definire la perturbazione $\psi(z, t)$. Essa è una funzione di due variabili reali, di conseguenza da qui in poi passeremo al formalismo delle derivate parziali. Osserviamo che se fissiamo il tempo t_0 , la funzione $\psi(z, t_0)$ descrive la *forma* della corda all'istante t_0 , come in una sorta di fotografia. Se invece fissiamo x_0 una posizione allora la funzione $\psi(x_0, t)$ descriverà il moto nel tempo del punto che si trova nella posizione x_0 . Chiamiamo inoltre x la direzione lungo la quale si svolge la perturbazione, ortogonale all'asse z .

Prendiamo ora una porzione di corda su cui sia applicata una perturbazione ψ . Prendiamo inoltre un qualche punto z su tale porzione di corda e un altro punto $z + \Delta z$. Consideriamo ora le forze agenti sul punto nelle due direzioni: $F_x = T_0 \sin \theta$ e $F_z = T_0 \cos \theta$, dove θ è l'angolo che individua il punto. Applicando l'approssimazione di piccole oscillazioni possiamo scrivere che $\sin \theta \sim \tan \theta = \frac{\partial \psi}{\partial z}$; inoltre $\cos \theta \sim 1$. Allora calcoliamo il modulo della tensione:

$$T = \sqrt{T_0^2 + T_0^2 \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} \sim T_0 \quad (5.2.1)$$

Decido qui di trascurare tutti gli infinitesimi di secondo ordine. Quindi la forza netta lungo z è uguale a 0. Cioè:

$$F_z(z) + F_z(z + \Delta z) = 0 \quad (5.2.2)$$

Valuto invece la forza lungo l'asse x :

$$\begin{aligned} F_x(z) + F_x(z + \Delta z) &= T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}(z + \Delta z, t) - T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) = \\ &= T_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial z}(z + \Delta z, t) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) \right] \cdot \frac{\Delta z}{\Delta z} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Possiamo ora supporre di far tendere $\Delta z \rightarrow 0$. Allora per definizione di derivata:

$$= T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t) \cdot \Delta z \quad (5.2.4)$$

Resta da inserire la parte inerziale. Osserviamo innanzitutto che dalla definizione della densità lineare $\rho = \frac{dm}{dz}$ segue direttamente che $m = \rho \Delta z$ supponendo che la densità lineare, come da approssimazioni, sia costante. Allora applichiamo la seconda legge della dinamica:

$$\rho \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(z, t) = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t) \cdot \Delta z \quad (5.2.5)$$

Semplificando, segue:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (5.2.6)$$

Tale equazione è nota con il nome di *equazione di d'Alembert*. Si tratta di una equazione differenziale alle derivate parziali di second'ordine e lineare.

Osservazione II.1. *Poiché l'equazione è lineare, vale certamente il principio di sovrapposizione. Cioè se due funzioni ψ_1 e ψ_2 risolvono l'equazione, anche qualunque funzione $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$ la risolve.*

5.3 Risoluzione dell'equazione di D'Alembert per corde fissate agli estremi

La risoluzione dell'equazione di D'Alembert risulta particolarmente semplice ed interessante nel caso di corde vincolate agli estremi.

5.3.1 Corda vincolata ad entrambi gli estremi

Consideriamo una corda di lunghezza L vincolata ad entrambi gli estremi. Traduciamo questo in termini di *condizioni al contorno*:

- $\psi(0, t) = 0 \forall t$
- $\psi(L, t) = 0 \forall t$

Supponiamo ora che l'equazione dell'onda si possa scrivere nella forma:

$$\psi(z, t) = S(z)C(t) \quad (5.3.1)$$

cioè come prodotto di due funzioni, l'una solo del tempo, l'altra solo dello spazio. Inserisco tale scrittura nella (5.2.6):

$$S(z) \frac{d^2 C}{dt^2} = \frac{T_0}{\rho} C(t) \frac{d^2 S}{dz^2} \quad (5.3.2)$$

Procedo ora a separare le variabili:

$$\frac{1}{C(t)} \frac{d^2 C}{dt^2} = \frac{1}{S(z)} \frac{T_0}{\rho} \frac{d^2 S}{dz^2} \quad (5.3.3)$$

Perché l'uguaglianza valga, deve essere vero che le due quantità sono uguali ad una costante che chiamo, non a caso, $-\omega^2$. Abbiamo dunque, considerando la componente temporale:

$$\frac{d^2 C(t)}{dt^2} = -\omega^2 C(t) \quad (5.3.4)$$

Essa è una equazione della stessa forma della (1.4.6), che ha dunque soluzione:

$$C(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (5.3.5)$$

Passando ora alla parte spaziale abbiamo in modo del tutto analogo due soluzioni della forma:

$$S_1(z) = \cos kz \quad (5.3.6)$$

$$S_2(z) = \sin kz \quad (5.3.7)$$

Quindi ogni funzione che sia loro combinazione lineare risolve:

$$S(z) = \alpha \cos kz + \beta \sin kz \quad (5.3.8)$$

dove ho definito $k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{T_0}}$ Impongo ora le condizioni al contorno:

$$S(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad (5.3.9)$$

$$S(L) = 0 \Rightarrow \beta \sin kL = 0 \quad (5.3.10)$$

E' noto che la soluzione della seconda equazione è data da:

$$kL = 0 + m\pi \quad (5.3.11)$$

dove m è un numero intero.

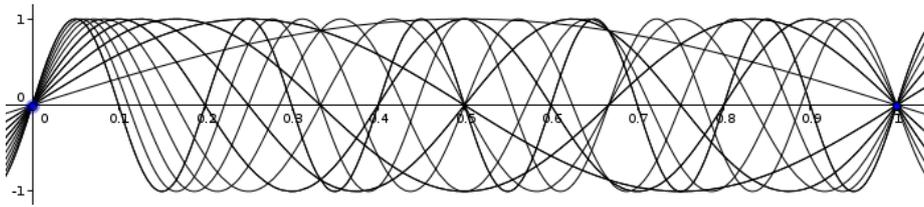


Figura 4: I primi dieci modi normali su una corda ideale fissata agli estremi lunga 1m. Plot eseguito con GeoGebra.

Qualche definizione per le onde armoniche

Una particolare categoria di soluzioni per l'equazione di d'Alembert è data dalle cosiddette *onde armoniche*, ossia esprimibili mediante combinazioni lineari di funzioni seno e coseno. Per tali onde definiamo le seguenti grandezze:

- lunghezza d'onda λ : periodicità della funzione d'onda a tempo fissato.
- numero d'onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.
- periodo T : periodicità della funzione d'onda a posizione fissata.
- frequenza $\nu = f = \frac{1}{T}$.
- pulsazione $\omega = 2\pi f$

Con queste definizioni possiamo quindi esprimere in modo più comodo la relazione (5.3.11):

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (5.3.12)$$

5.3.2 Corda vincolata ad un solo estremo

Nel caso della corda vincolata ad un solo estremo si pone immediatamente il problema di come sia possibile fornire tensione ad essa. Immaginiamo allora di poter costruire un sistema (ovviamente ideale) in cui la corda ad un estremo è fissa, mentre all'altro è agganciata ad un anellino libero di scorrere senza attrito lungo una guida che si trova nella medesima direzione della perturbazione. In questo caso le condizioni al contorno sono:

- $\psi(0, t) = 0$
- $\frac{\partial \psi}{\partial z}(L, t) = 0$

Allora supponiamo che la soluzione sia una funzione scrivibile nella forma:

$$\psi(z, t) = S(z)C(t) \quad (5.3.13)$$

e imponiamo che risolva. Abbiamo, come visto prima, una soluzione della forma:

$$S(z) = \alpha \sin(kz) + \beta \cos(kz) \quad (5.3.14)$$

Imponendo la prima condizione al contorno si ricava ancora $\alpha = 0$. Derivo poi e impongo la seconda:

$$\frac{dS}{dz}(L) = \beta k \cos(kL) = 0 \Rightarrow kL = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (5.3.15)$$

Da cui si ricava:

$$\lambda = \frac{4L}{2n+1} \quad (5.3.16)$$

5.4 Velocità di fase

Cerchiamo ora la cosiddetta *velocità di fase* dell'onda, cioè la velocità della traslazione rigida della forma della corda.

Osservazione II.2. *In effetti, possiamo dire che l'equazione di d'Alembert ci fornisce una definizione di onda sulla corda: è un'onda una funzione in spazio e tempo per cui sia verificata l'equazione di d'Alembert.*

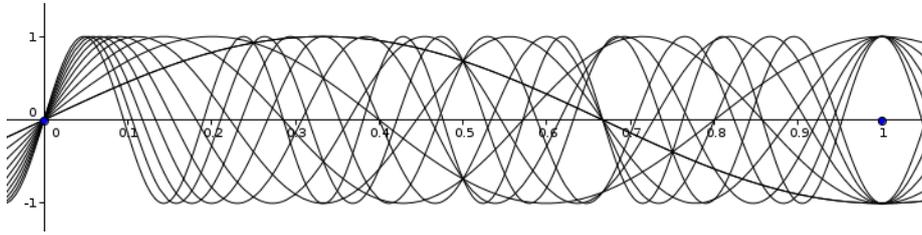


Figura 5: I primi dieci modi normali su una corda ideale fissata ad un estremo lunga 1m. Plot eseguito con GeoGebra.

La soluzione più generica dell'equazione di d'Alembert è data da:

$$\psi(z, t) = \psi(z \pm vt) \quad (5.4.1)$$

Possiamo vedere la funzione $\psi(z, t)$ come una funzione di una sola variabile ψ^* composta con una $f(z, t)$. Quindi:

$$\psi(z, t) = \psi^*(f(z, t)) \quad (5.4.2)$$

Applichiamo le regole di derivazione della funzione composta:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi^*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5.4.3)$$

Definiamo ora $v = -\frac{\partial f}{\partial t}$. Derivando ulteriormente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial f^2} v^2 \quad (5.4.4)$$

Passiamo ora a considerare la derivata parziale rispetto allo spazio:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi^*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (5.4.5)$$

e imponiamo: $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$. Derivando ulteriormente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial f^2} \quad (5.4.6)$$

Sostituendo nella (5.2.6) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial f^2} v^2 = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial f^2} \quad (5.4.7)$$

Segue, semplificando, che:

$$v = \pm \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad (5.4.8)$$

La grandezza v così definita si dice *velocità di fase* dell'onda. Una importante relazione relativa alla velocità di fase è, per le onde armoniche:

$$v = \lambda \nu \quad (5.4.9)$$

In base al segno nella soluzione le onde si distinguono in *progressive* e *regressive*.

Supponiamo ora che una data funzione $f(v, t)$ sia tale che $\psi^*(f(v, t))$ sia soluzione dell'equazione di d'Alembert. Poniamo una condizione iniziale $\psi(0, 0) = \psi^*(0)$. Ci chiediamo ora dopo quanto tempo si ha di nuovo la stessa condizione. Questo accade quando si ha nuovamente: $f(z, t) = 0$, cioè, applicando quanto dimostrato prima, quando: $z - vt = 0 \Rightarrow z = vt$. Abbiamo dunque ricavato che la funzione che descrive la forma dell'onda viene rigidamente traslata con un moto rettilineo uniforme. Abbiamo già detto () che l'equazione di d'Alembert è lineare, dunque vale il principio di sovrapposizione. Allora la soluzione più generale possibile è data da una combinazione lineare di un'onda progressiva con un'onda regressiva:

$$\psi(z, t) = \psi_+^*(z - vt) + \psi_-^*(z + vt) \quad (5.4.10)$$

6 Trasporto di energia sulla corda

Una comune definizione di onda è la seguente:

Si dice *onda* una perturbazione che trasporta energia senza trasportare materia.

Abbiamo già visto che un'onda non trasporta materia. Valutiamo ora il trasporto di energia da parte di un'onda. Consideriamo uno spezzone semifinito di corda. Lungo l'asse x si ha una resistenza allo spostamento da parte della corda, che esercita una forza di richiamo e dunque compie un lavoro. Tale forza è data da:

$$F_x = T_0 \sin \theta \sim T_0 \tan \theta \sim T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (6.0.1)$$

(supponendo di essere nell'ipotesi di piccole oscillazioni). Supponiamo di voler ottenere un piccolo spostamento $\Delta\psi$. Il lavoro che dobbiamo compiere vale:

$$\Delta W = F_x \Delta\psi = -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \Delta z \quad (6.0.2)$$

Calcoliamo ora la potenza, derivando nel tempo:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (6.0.3)$$

Specializziamo l'espressione precedente per una perturbazione armonica $\psi(0, t) = A \cos(\omega t + \phi)$ imposta in $z = 0$, che provoca un'onda di equazione $\psi(z, t) = A \cos(kz - \omega t)$:

$$P = -T_0 A^2 k \omega \sin^2(kz - \omega t) = T_0 A^2 k \omega \sin^2[k(z - vt)] \quad (6.0.4)$$

Quindi si ha che, in realtà, $P = P(z, t)$, e che in particolare la potenza si può esprimere come una $P = P^*(z \pm vt)$. Segue che la potenza è una soluzione dell'equazione di d'Alembert: si può parlare di un'onda di potenza! In realtà questa soluzione, che abbiamo ricavato nel caso specifico delle onde armoniche, ha validità molto più generica e vale per qualunque onda. Possiamo calcolare la potenza media di un'onda armonica, osservando che la funzione $h(x) = \sin^2(x)$ ha periodicità di 2π :

$$\bar{P} = \int_0^{\frac{\pi}{k}} P(z, t_0) dx = \frac{1}{2} T_0 A^2 k \omega \quad (6.0.5)$$

Osservazione II.3. *In realtà questa media è calcolata come una media spaziale. Il medesimo risultato si riesce ad ottenere con la potenza mediata nel tempo:*

$$\bar{P} = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} P(z_0, t) dx \quad (6.0.6)$$

6.1 Oscillatore come eccitatore di un'onda

Supponiamo ora di eccitare un'onda su una corda mediante un oscillatore armonico, agganciato alla corda stessa. Supponiamo di spostare la massa verso l'alto. Applichiamo la seconda legge della dinamica, supponendo di essere nelle approssimazioni precedentemente esplicitate. Allora:

$$F = ma = m\ddot{x} = -kx + 2T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (6.1.1)$$

E' noto però che:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow F = -kx - 2\frac{T_0}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (6.1.2)$$

E' però evidente che, visto che la corda e l'oscillatore sono agganciati, si ha che $\psi(0, t) = x(t)$. Posso dunque scrivere l'equazione di moto dell'oscillatore:

$$\ddot{x} + 2\frac{T_0}{mv} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.1.3)$$

Osservazione II.4. *E' a questo proposito opportuno osservare che la velocità di fase dell'onda v non ha a che fare con la velocità del moto armonico del punto, che abbiamo indicato con \dot{x} . Nella precedente ad esempio v è un parametro, \dot{x} la derivata della funzione incognita $x(t)$.*

Abbiamo dunque ricavato una legge di moto del tutto analoga alla (2.0.2). Quindi si ha un moto analogo a quello smorzato da una forza di attrito viscoso.

7 Cambio di mezzo di propagazione

Consideriamo una corda formata da due spezzoni semifiniti, di diversa densità lineare ρ_1 e ρ_2 . Allora la velocità di propagazione è diversa:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_1}} \neq v_2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_2}} \quad (7.0.1)$$

Sul primo spezzone di corda applichiamo una perturbazione progressiva ψ_i che definiamo *incidente*. Avremo un'onda regressiva *riflessa* ψ_r e una progressiva *trasmessa* ψ_t . Esplicitiamo le seguenti condizioni per costruire il nostro modello:

- la corda non si deve spezzare nel punto di separazione (cui assegniamo per comodità la posizione $z = 0$). La funzione ψ deve dunque essere continua. Di conseguenza:

$$\psi_i(0, t) + \psi_r(0, t) = \psi_t(0, t) \quad (7.0.2)$$

- il sistema non deve essere dissipativo, quindi non si deve disperdere energia:

$$P_i(0, t) = P_r(0, t) + P_t(0, t) \quad (7.0.3)$$

- Sviluppriamo il discorso per le onde armoniche.

L'onda incidente mette in moto il punto di separazione, che diventa generatore di una nuova onda. Di conseguenza ω è uguale per le tre onde incidente, riflessa e trasmessa. Ma poiché vale la (5.4.9) si ha che se la velocità è diversa deve cambiare la lunghezza d'onda. Ma la velocità è univocamente determinata per ogni porzione di corda mediante la (5.4.8), quindi la lunghezza d'onda è fissa per le onde propaganti nella medesima semicorda. Riassumiamo con la seguente tabella:

Onda	Pulsazione	Numero d'onda
ψ_i	ω	k_1
ψ_t	ω	k_2
ψ_r	ω	k_1

Comincio ad imporre la continuità ⁴:

$$\psi_i \cos(-\omega t) + \psi_r \cos \omega t = \psi_t \cos(-\omega t) \quad (7.0.4)$$

Ma questo deve valere ad ogni istante di tempo t . Segue che:

$$\psi_i + \psi_r = \psi_t \quad (7.0.5)$$

Impongo adesso la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_0 \psi_i^2 k \omega \sin^2 \omega t &= \frac{1}{2} T_0 \psi_t^2 k \omega \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} T_0 \psi_r^2 k \omega \sin^2 \omega t \\ &\Rightarrow k_1 \psi_i^2 = k_2 \psi_t^2 + k_1 \psi_r^2 \end{aligned} \quad (7.0.6)$$

Mettiamo a sistema le equazioni precedenti. Definendo $t = \frac{\psi_t}{\psi_i}$ e inoltre $r = \frac{\psi_r}{\psi_i}$ si ottiene:

$$1 + r = t \quad (7.0.7)$$

$$k_1 = k_1 r^2 + k_2 t^2 \quad (7.0.8)$$

Sostituendo, con qualche calcolo s'ottengono le relazioni:

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (7.0.9)$$

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (7.0.10)$$

I coefficienti si dicono, rispettivamente, *coefficiente di riflessione d'ampiezza* e *coefficiente di trasmissione d'ampiezza*. Si definiscono anche i due coefficienti di *potenza*:

$$R = \frac{k_1 \psi_r^2}{k_1 \psi_i^2} = r^2 \quad (7.0.11)$$

$$T = \frac{k_2 \psi_t^2}{k_1 \psi_i^2} = t^2 \frac{k_2}{k_1} = 1 - R \quad (7.0.12)$$

⁴Da qui in avanti indicherò con ψ_h l'ampiezza dell'onda stessa. Questo abuso di notazione per semplificare un po' la scrittura.

Osserviamo che i coefficienti si possono scrivere in modo analogo sostituendo ai numeri d'onda le densità lineari del rispettivo tratto di corda. Vale infatti la relazione:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{T_0}} \quad (7.0.13)$$

e ω e T_0 sono uguali in tutta la corda.

Osservazione II.5. *Interessanti sono i casi limite dei coefficienti precedentemente definiti. Ad esempio, se abbiamo $\rho_2 \gg \rho_1$ otteniamo:*

$$r \sim \frac{-\rho_2}{\rho_2} = -1 \quad t \sim \frac{2\rho_1}{\rho_2} \sim 0 \quad (7.0.14)$$

Se invece $\rho_2 \ll \rho_1$ abbiamo:

$$r \sim \frac{r_1}{r_1} = 1 \quad t \sim \frac{2r_1}{r_1} = 2 \quad (7.0.15)$$

8 Cenni di analisi di Fourier

Vogliamo ora brevemente occuparci di come studiare il comportamento di un'onda che non sia armonica ma di forma qualsiasi. Consideriamo una corda fissata ai due estremi. Possiamo imprimere alla corda una qualsivoglia perturbazione ψ . Allora tale perturbazione si può scrivere come serie (somma infinita) di modi normali, "pesati" da un apposito coefficiente di ampiezza A_n :

$$\psi(z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nk_1 z) \cos(n\omega_1 t + \phi) \quad (8.0.1)$$

Ovviamente abbiamo il problema di ricavare i coefficienti A_n . Per farlo, consideriamo di spostare la corda dalla posizione di equilibrio secondo una funzione a piacere $\psi(z, 0)$. Allora possiamo scrivere tale funzione come serie di Fourier:

$$\psi(z, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nk_1 z) \quad (8.0.2)$$

Nello spazio delle funzioni sulla corda (che ha lunghezza L) definisco ora un prodotto scalare \langle, \rangle dato da:

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(z)g(z)dz \quad (8.0.3)$$

Voglio verificare che valga l'uguaglianza:

$$A_n = \langle \psi(z, 0), \sin(nk_1 z) \rangle \quad (8.0.4)$$

Per la (8.0.1) si può scrivere:

$$\begin{aligned} \langle \psi(z, 0), \sin(nk_1 z) \rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L \psi(z, 0) \sin(nk_1 z) dz = \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \sum_m A_m \sin(mk_1 z) \sin(nk_1 z) dz = \end{aligned} \quad (8.0.5)$$

Applicando le formule di Werner:

$$= \frac{2}{L} \left[\sum_m A_m \int_0^L \frac{1}{2} \cos((m-n)k_1 z) dz - \int_0^L \frac{1}{2} \cos((m+n)k_1 z) dz \right] \quad (8.0.6)$$

Ma si osserva che l'integrale, per simmetrie delle funzioni, vale semplicemente:

$$= \frac{2}{L} \frac{L}{2} A_n = A_n \quad (8.0.7)$$

Così l'uguaglianza (8.0.4) è dimostrata. Essendo in questo modo a conoscenza dei coefficienti A_n è così possibile prevedere con precisione il comportamento nel tempo dell'onda di forma qualsiasi.

Parte III

Acustica

Ci accingiamo ora allo studio di alcuni elementi di acustica, cioè della branca della fisica che si occupa del suono. Vogliamo proporre una teoria ondulatoria del suono che mostri in particolare i suoi punti di contatto con il modello della corda.

9 Costruzione del modello

9.1 Approssimazioni

Anche qui è necessario primariamente dichiarare un certo numero di approssimazioni:

- Consideriamo un fluido perfettamente *viscoso*, cioè tale che la perturbazione si possa definire uniforme su tutta la superficie; vogliamo cioè avere un'onda *piana*.
- Il fluido sia perfettamente elastico.
- Il fluido sia divisibile in porzioni infinitesime di volume dV che contengono però un numero enorme di molecole.

9.2 Equazione di d'Alembert in un fluido

Consideriamo un tubo avente sezione uniforme S e diamo una perturbazione ψ nel tubo. Definiamo inoltre una pressione di partenza del fluido nel tubo P_0 e una densità iniziale ρ_0 . Osserviamo che, poiché il fluido non sopporta sforzi di taglio, si possono avere esclusivamente spostamenti *longitudinali*. Prendiamo una porzione di tubo lunga Δz che contenga un volume V_0 di fluido. La perturbazione provoca una variazione di volume ΔV :

$$\Delta V = S\psi(z + \Delta z, t) - S\psi(z, t) = [S\psi(z + \Delta z, t) - S\psi(z, t)] \frac{\Delta z}{\Delta z} \quad (9.2.1)$$

Ponendo che la variazione Δz sia infinitesima otteniamo, per definizione di derivata:

$$\Delta V = S \frac{\partial \psi}{\partial z} \Delta z = V_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (9.2.2)$$

Valutiamo ora la variazione di densità rispetto alla variazione di volume:

$$\Delta \rho = -\frac{m}{V_0^2} \Delta V = -\frac{m}{V_0} \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) \quad (9.2.3)$$

Analizziamo infine la pressione. Si ha: Quindi si ha:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Delta \rho = -\rho_0 \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (9.2.4)$$

E chiamo $\beta = \rho_0 \frac{\partial P}{\partial \rho}$. Per analogia formale con le precedenti, verrebbe da supporre $\beta = P_0$, ma questo sarà ancora da discutere, perché dipende dal modello termodinamico del suono che scegliamo di adottare (vedi paragrafo successivo).

Dalla pressione, secondo la definizione $P = \frac{F}{S}$, è possibile ricavare la forza:

$$F_1 = S \Delta P(z, t) \quad (9.2.5)$$

$$F_2 = S \Delta P(z + \Delta z, t) \quad (9.2.6)$$

Sommando le due precedenti:

$$\begin{aligned} F_z &= -S \Delta z \left[\frac{\Delta P(z + \Delta z, t) - \Delta P(z, t)}{\Delta z} \right] = -S \Delta z \frac{\partial \Delta P}{\partial z}(z, t) = \\ &= S \Delta z \frac{\partial [\beta \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t)]}{\partial z} = \\ &= S \Delta z \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Uguaglio ora secondo la II legge di Newton:

$$S \Delta z \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Rightarrow \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (9.2.8)$$

Ho così ottenuto una legge analoga alla (5.2.6). In particolare, ho ottenuto la velocità di fase $v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$. Questo ci dà un modo semplice per valutare i modelli termodinamici che proporremo del suono: un modello per cui si abbia una v compatibile con quella misurata sarà accettabile.

9.3 Un modello termodinamico per il suono

Storicamente furono proposti due modelli termodinamici per il suono, da parte di Newton e di Laplace.

9.3.1 Modello di Newton

Newton propose un modello basato sul fatto che la propagazione del suono sia *isoterma*. Secondo la legge dei gas perfetti si ha dunque:

$$PV = N k_B T \Rightarrow P = \frac{N}{V} k_B T \frac{\mu}{\mu} = \rho \frac{k_B T}{\mu} \quad (9.3.1)$$

E ricavo dunque:

$$\beta = \rho_0 \frac{\partial P}{\partial \rho} = \rho_0 \frac{k_B T}{\mu} = P_0 \quad (9.3.2)$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che se la trasformazione è isoterma allora T è costante, inoltre μ e k_B sono costanti in modo ovvio. Segue che il valore di queste quantità non varia tra la situazione iniziale e quella finale. Ma allora possiamo calcolare la velocità del suono sulla Terra. Inserendo i parametri di pressione, densità e temperatura standard risulta:

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \sim 280 \frac{m}{s} \quad (9.3.3)$$

Ma sulla Terra si misura una velocità del suono di circa $330 \frac{m}{s}$ nelle stesse condizioni, dunque il modello di Newton presenta certamente un difetto.

9.3.2 Modello di Laplace

Il modello di Laplace prevede una trasformazione *adiabatica*, cioè che avviene senza scambio di calore con l'esterno. Questo ha senso perché l'espansione dovuta alla perturbazione ha una velocità così elevata da essere più alta della velocità dello scambio di calore con l'esterno. Si ha dunque un repentino sbalzo di temperatura, comunque decisamente al di sotto delle capacità della sensazione umana. La legge dell'adiabatica ha la forma:

$$PV^\gamma = \text{costante} \quad (9.3.4)$$

In tale formula, detto f il numero di gradi di libertà delle particelle componenti il fluido, si ha:

$$\gamma = \frac{f+2}{f} \quad (9.3.5)$$

L'aria è prevalentemente composta da molecole biatomiche che possiamo con buona approssimazione immaginare come stanghe di lunghezza fissa cui sono agganciate sfere agli estremi. Un sistema del genere ha evidentemente un totale di sei parametri (le tre coordinate di ciascuna sfera) e un vincolo (la lunghezza fissata dell'asta). Ha dunque cinque gradi di libertà. Quindi $\gamma = 1.4$. Si può scrivere:

$$\begin{aligned} PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma &\Rightarrow \frac{P}{P_0} = \left(\frac{m V_0}{m V}\right)^\gamma = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \\ \Rightarrow P = P_0 \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma} &\Rightarrow \beta = \rho_0 \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho = \rho_0) = \gamma \rho_0^{1-\gamma} P_0 \rho_0^{\gamma-1} = \gamma P_0 \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

Da qui ricaviamo una velocità:

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} \sim 330 \frac{m}{s} \quad (9.3.7)$$

Si può ricavare una più semplice dipendenza della velocità dalla sola temperatura. Infatti, per la legge dei gas perfetti vale:

$$P_0 = \rho_0 \frac{k_B T}{\mu} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{\mu}} \quad (9.3.8)$$

Dunque all'onda di pressione e di densità è in generale associata un'onda di temperatura. Vogliamo quantificare la variazione di temperatura dovuta al suono. Per la legge dei gas perfetti:

$$\Delta(PV) = Nk_B(\Delta T) \quad (9.3.9)$$

Differenziando si trova:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\Delta V}{V_0} \quad (9.3.10)$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_0 \left[\frac{1}{V_0} V_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) - \frac{1}{P_0} \gamma P_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) \right] = \\ &= T_0(1 - \gamma) \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

Il modello di Newton non prevedeva variazioni di temperatura, dunque è consistente con una trasformazione adiabatica in cui $\gamma = 1$. Si osserva sperimentalmente però che a frequenze molto alte (ben al di là dell'udibile) il suono si comporta secondo una trasformazione isoterma. Infatti per la (5.4.9) se la frequenza sale la lunghezza d'onda scende. Il calore su piccole lunghezze si scambia molto velocemente, dunque non si ha più una situazione adiabatica.

10 Propagazione del suono nei liquidi e nei solidi

Cominciamo a ragionare sulla propagazione del suono nei liquidi. Essi sono materiali comprimibili, ma caratterizzati da un rapporto $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ molto grande. Quindi la velocità, che è direttamente proporzionale alla radice quadrata di tale rapporto, risulta molto più elevata.

Per quanto riguarda i solidi è opportuno ridefinire la costante elastica in maniera tale che non dipenda dalle caratteristiche geometriche della disposizione del materiale ma solo dal materiale stesso. E' così possibile ridefinire la legge di Hooke come segue:

$$F = -k\psi = -E \frac{S}{\Delta z} \psi \quad (10.0.1)$$

La quantità E , che ha le dimensioni di una pressione, si dice *modulo di Young* del materiale. Per l'acciaio, ad esempio, $E = 2 \cdot 10^{11} Pa$. Scriviamo l'equazione di d'Alembert per il suono nei solidi utilizzando il modulo di Young:

$$F_z = ES \left[\frac{\partial \psi}{\partial z}(z + \Delta z, t) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) \right] = ES \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Delta z \quad (10.0.2)$$

Eguagliando alla parte inerziale:

$$ES \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Delta z = \rho_0 S \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (10.0.3)$$

Da cui, tra l'altro, $v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$. Ad esempio, la velocità del suono nell'acciaio (modulo di Young $E = 2 \cdot 10^{11} Pa$, densità volumetrica $\rho_0 = 7500 \frac{kg}{m^3}$) vale $v_s = 5292 \frac{m}{s}$.

11 Un modello tridimensionale per il suono

11.1 Potenza e intensità di un'onda acustica

Vogliamo ora considerare tridimensionalmente l'onda acustica. Cominciamo con il ragionare sulla potenza trasportata da un'onda acustica. Sappiamo che possiamo interpretare il fenomeno-suono come un'onda di pressione. Abbiamo così:

$$\Delta P = -\gamma P_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (11.1.1)$$

Ricaviamo la forza, quindi il lavoro, quindi la potenza⁵:

$$F = S \Delta P = -\gamma P_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} S \Rightarrow \Pi = \gamma P_0 S \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11.1.2)$$

Definiamo ora la grandezza *intensità*, cioè la potenza per unità di superficie: $I = \frac{\Pi}{S}$. Ovviamente:

$$I = \gamma P_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11.1.3)$$

Inseriamo nella precedente l'equazione di un'onda armonica piana $\psi(z, t) = A \cos(kz - \omega t)$:

$$I = \gamma P_0 A k \sin(kz - \omega t) A \omega \sin(kz - \omega t) = \gamma P_0 A^2 k \omega \sin^2(kz - \omega t) \quad (11.1.4)$$

Da cui, mediando:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \gamma P_0 A^2 k \omega \quad (11.1.5)$$

11.2 Propagazione tridimensionale del suono

Consideriamo ora di avere, invece del solito tubo, un mezzo fluido isotropo, cioè tale che la perturbazione si possa diffondere in maniera uniforme in tutte le direzioni. Consideriamo altresì di avere una sorgente puntiforme. L'equazione di d'Alembert assume la forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2(\psi) \quad (11.2.1)$$

In coordinate sferiche si ha cioè:

$$\frac{\partial^2 r\psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 r\psi}{\partial z^2} \quad (11.2.2)$$

Come già visto in precedenza, una soluzione generale di questa equazione è della forma:

$$r\psi = f(r \pm vt) \Rightarrow \psi \propto \frac{1}{r} f(r \pm vt) \quad (11.2.3)$$

Consideriamo in particolare le onde armoniche (scritte in coordinate sferiche):

$$\psi(r, t) = A(r) \cos(kr - \omega t) \quad (11.2.4)$$

⁵Uso qui il simbolo non standard Π per la potenza per evitare la confusione con il simbolo P di pressione.

Segue dalla precedente che punti alla medesima distanza dal centro hanno la stessa fase. Si dice *fronte d'onda* l'insieme dei punti *equifase* di un'onda piana armonica. Osserviamo inoltre che in coordinate sferiche la scrittura dell'equazione di un fronte d'onda $kz \pm \omega t = \text{costante}$ è l'equazione di una sfera. Inoltre i fenomeni che essa rappresenta *non* sono simmetrici. Infatti $kz - \omega t = \text{costante}$ è l'equazione di una sfera che aumenta nel tempo il proprio raggio (onda *divergente*). Invece $kz + \omega t = \text{costante}$ è l'equazione di una sfera che diminuisce nel tempo il proprio raggio (onda *convergente*). Le due situazioni sono evidentemente opposte dal punto di vista energetico. Nel caso limite infatti una teorica onda convergente provoca una esplosione della funzione intensità, che ha un asintoto verticale nel punto di convergenza.

Impongo ora la conservazione dell'energia ad un'onda armonica piana divergente:

$$\psi = A(r) \cos(kz - \omega t) \quad (11.2.5)$$

$$\Pi = I(r)S(r) \quad (11.2.6)$$

$$\Pi(r_0) = \Pi(r) = \Pi \quad (11.2.7)$$

Inoltre, è nota la dipendenza della superficie dal raggio:

$$S(r) = 4\pi r^2 \quad (11.2.8)$$

Allora, applicando la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \Pi(r_0) &= \frac{1}{2} A^2(r_0) \gamma P_0 k \omega 4\pi r_0^2 = \Pi(r) = \frac{1}{2} A^2(r) \gamma P_0 k \omega 4\pi r^2 \\ &\Rightarrow A^2(r_0) r_0^2 = A^2(r) r^2 \Rightarrow A(r) = \frac{r_0}{r} A(r_0) \end{aligned} \quad (11.2.9)$$

Inserendo nell'equazione dell'onda ricaviamo:

$$\psi(r, t) = A(r_0) \frac{r_0}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (11.2.10)$$

Che costituisce l'equazione di un'onda armonica in uno spazio tridimensionale isotropo. Osserviamo che se avessimo un'onda libera di propagare in una porzione di spazio non completa (come se la sorgente fosse appoggiata al pavimento o nell'angolo di una stanza) basterebbe considerare una diversa dipendenza della superficie da r , secondo l'equazione.

$$S(r) = \Sigma r^2 \quad (11.2.11)$$

dove Σ indica l'ampiezza dell'angolo solido, espresso in steradiani.

11.3 Fenomeni di attenuazione geometrica e per assorbimento

A partire dalla (11.2.10) possiamo calcolare l'intensità del suono:

$$I = \frac{1}{2} \gamma P_0 k \omega A^2(r_0) \frac{r_0^2}{r^2} \quad (11.3.1)$$

Abbiamo evidentemente una decrescita quadratica dell'intensità che si definisce *attenuazione geometrica*. Essa è dovuta alla dispersione di energia su una superficie che cresce con l'andare del tempo.

Si può anche provocare artificialmente un fenomeno di attenuazione per assorbimento mediante l'inserzione di appositi materiali lungo il cammino dell'onda. Detto α il coefficiente di assorbimento, vale la legge di Lambert-Beer:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} \quad (11.3.2)$$

Nella forma più generale si ha allora che l'equazione (11.2.10) si può scrivere, considerando l'attenuazione per assorbimento, come:

$$\psi(r, t) = A(r_0) \frac{r_0}{r} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_0)} \cos(kr - \omega t) \quad (11.3.3)$$

11.4 Percezione della radiazione acustica

L'orecchio umano è in grado di percepire suoni all'interno di un range di frequenze tra 20 e 20.000 Hz all'incirca. In termini di intensità invece è in grado di udire suoni che vanno da $10^{-12} \frac{W}{m^2}$ (*soglia di udibilità*) sino a $1 \frac{W}{m^2}$ (*soglia del dolore*). Inoltre la risposta dell'orecchio alla variazione di intensità non è lineare ma logaritmica. Si definisce allora il *livello d'intensità sonora*:

$$B = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (11.4.1)$$

In tale formula I_0 denota la soglia di udibilità pari, come abbiamo detto, a $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$. Il livello d'intensità sonora si misura in *dB* (decibel).

11.5 Effetto Doppler

La propagazione del suono è un fenomeno che avviene con un sistema di riferimento *privilegiato*, cioè quello in cui l'aria risulta ferma. Dunque situazioni di reciproco movimento tra due corpi non sono simmetriche. Distinguiamo allora due casi.

11.5.1 La sorgente è in movimento

Se la sorgente è in movimento, l'onda da essa emessa risulta "schiacciata" se si avvicina al ricevitore, "dilatata" se si allontana. Si ha infatti:

$$\lambda_R = \lambda_E \pm v_E T \quad (11.5.1)$$

Dove λ_R indica la frequenza ricevuta, λ_E quella emessa e T il periodo dell'onda. Sono inoltre note le relazioni:

$$\lambda_E = \frac{v_S}{\nu_E} \quad ; \quad \lambda_R = \frac{v_S}{\nu_R} \quad (11.5.2)$$

Combinando le precedenti:

$$\frac{v_S}{\nu_R} = \frac{v_S}{\nu_E} - \frac{v_E}{\nu_E} = \frac{v_S - v_E}{\nu_E} \quad (11.5.3)$$

E si riesce a ricavare:

$$\nu_R = \nu_E \frac{v_S}{v_S - v_E} \quad (11.5.4)$$

11.5.2 Il ricevente è in movimento

In questo caso la velocità del suono nel sistema di riferimento cambia (semplicemente per le trasformazioni di Galileo):

$$v'_S = v_S + v_R \quad (11.5.5)$$

La sorgente però è ferma, quindi la lunghezza d'onda λ è fissa. Abbiamo allora, applicando la (5.4.9):

$$\lambda \nu_R = v_S + v_R \quad (11.5.6)$$

Inoltre:

$$\lambda \nu_E = v_S \quad (11.5.7)$$

Dividendo le precedenti si ottiene:

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{v_S + v_R}{v_S} \Rightarrow \nu_R = \nu_E \frac{v_S + v_R}{v_S} \quad (11.5.8)$$

Parte IV

Fenomeni specificamente ondulatori

Abbiamo già visto che un qualunque fenomeno ondulatorio gode del principio di sovrapposizione. Questa è in effetti una diretta conseguenza della linearità della equazione di d'Alembert. Da questo principio derivano alcuni fenomeni che sono specificamente ondulatori a cui dedichiamo questa parte. Una caratteristica da tenere presente di questi fenomeni è che essi valgono per le onde *in generale*, indipendentemente dal tipo di onde di cui stiamo parlando. Valgono dunque per le onde sulla corda come per le onde sonore o, come vedremo, per le onde elettromagnetiche.

12 Interferenza di onde congruenti sfasate

Supponiamo di avere due onde armoniche $\psi_1(z, t) = A \cos(kz - \omega t)$ e $\psi_2(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \phi)$. Allora, applicando il principio di sovrapposizione, $\psi = \psi_1 + \psi_2$ è un'onda. Usando le formule di prostaferesi si ricava:

$$\psi(z, t) = A \left[2 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{2kz - 2\omega t + \phi}{2}\right) \right] = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(kz - \omega t + \frac{\phi}{2}\right) \quad (12.0.1)$$

In particolare, se le onde sono in *fase* ($\phi = 2k\pi$ allora si ha *interferenza costruttiva*), se sono in *opposizione di fase* ($\phi = (2k + 1)\pi$) allora si ha *interferenza distruttiva*.

13 Interferenza di onde con frequenze prossime (battimenti)

Consideriamo ora il caso di due onde armoniche ψ_1 e ψ_2 aventi frequenze molto vicine. Possiamo ad esempio richiedere che:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \ll 1 \quad (13.0.1)$$

La perturbazione somma ψ avrà equazione:

$$\psi(z, t) = A [\cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t)] = \quad (13.0.2)$$

Applicando le formule di prostaferesi:

$$= 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} z - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cos(\bar{k} z - \bar{\omega} t) \quad (13.0.3)$$

Il primo termine prende il nome di *modulante*, il secondo di *portante*. Di fatto la modulante costituisce l'involuppo della portante, "modulandone" appunto l'ampiezza. L'intensità viene dunque a variare nel tempo. Infatti:

$$I \propto 4A^2 \cos^2\left(\frac{\Delta k}{2} z - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \quad (13.0.4)$$

E la funzione $f(x) = \cos^2(x)$ è periodica di π . Quindi la periodicità della funzione intensità vale:

$$\frac{\Delta \omega}{2} T = \pi \Rightarrow T = \frac{1}{\Delta f} \quad (13.0.5)$$

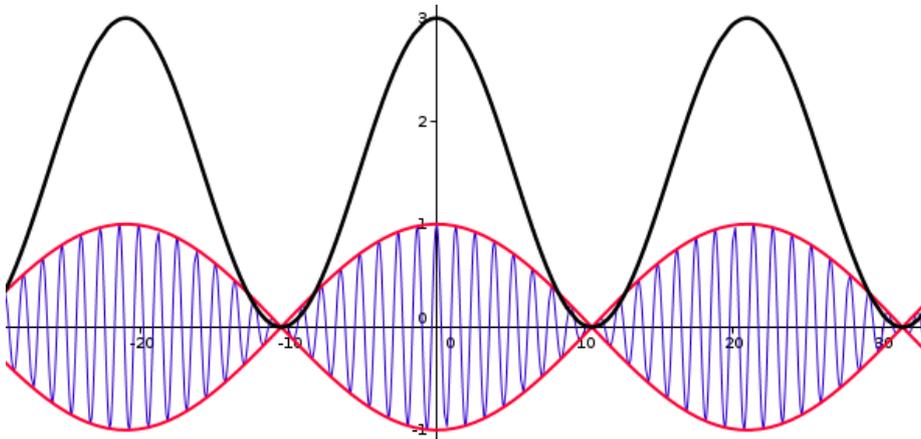


Figura 6: Battimenti tra due onde di frequenza prossima. In rosso la modulante, in blu la portante. In nero è riportata, ovviamente in altra scala, la funzione intensità. Plot eseguito con GeoGebra.

14 Interferenza di onde per differenza di cammino

Consideriamo ora due onde armoniche ψ_1 e ψ_2 in fase tra loro. Supponiamo che le onde siano emesse da due sorgenti puntiformi S_1 e S_2 , tra loro distanti una quantità d . Vogliamo rilevare il segnale in un punto M , raggiunto da due raggi r_1 e r_2 .

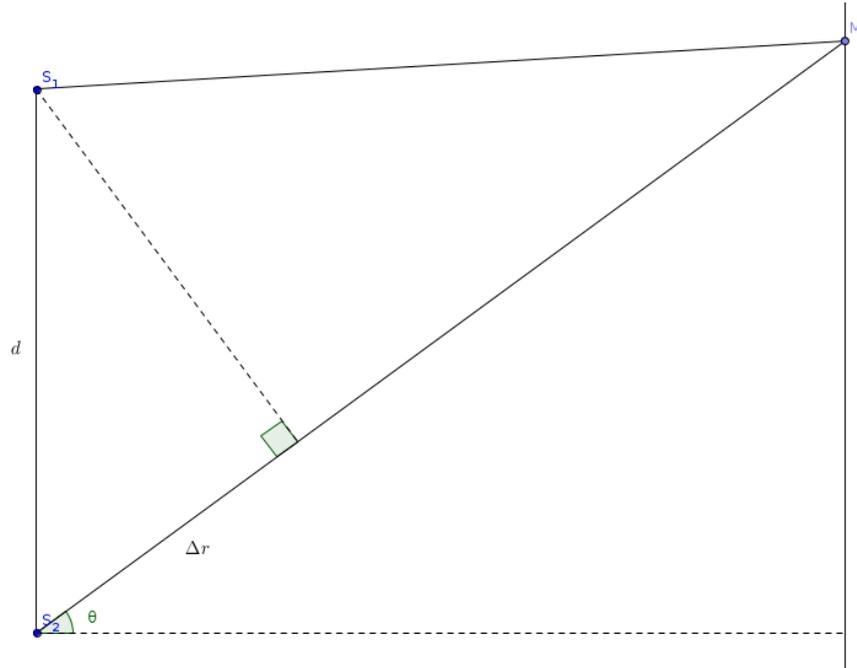


Figura 7: Schema del sistema descritto per l'interferenza da sorgenti puntiformi. Plot eseguito con GeoGebra.

Ponendosi ora in una situazione di *far field* (campo lontano) possiamo approssimare i due raggi paralleli e aventi il medesimo percorso (la distanza tra le sorgenti è molto più piccola della distanza di esse da M). Allora, sommando come di consueto e applicando prostaferesi:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= A(r_0) \frac{r_0}{r} [\cos(kr_1 - \omega t) + \cos(kr_2 - \omega t)] = \\ &= 2A(r_0) \frac{r_0}{r} \cos\left(\frac{kr_1 - kr_2}{2}\right) \cos\left(\frac{k\bar{r}}{2} - \omega t\right) \end{aligned} \quad (14.0.1)$$

In tale formula abbiamo posto la semisomma dei due cammini uguale alla loro media. Lo sfasamento tra le due onde vale, nel punto M , una quantità:

$$\phi = k\Delta r = kd \sin \theta \quad (14.0.2)$$

Si definisce la quantità $\delta = \frac{kd \sin \theta}{2}$. Allora si individuano i massimi (cioè i picchi di intensità) nei punti in cui $\delta = n\pi$, cioè nei punti in cui lo sfasamento è un

multiplo intero di π , i minimi nei punti in cui $\delta = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$. L'intensità dell'onda è data da:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{kd \sin \theta}{2} \right) = 4I_0 \cos^2 \delta \quad (14.0.3)$$

Sembra così che sia stata creata nuova energia, il che è evidentemente assurdo. Andando però a mediare su tutto il fronte d'onda si scopre che l'energia è solo stata redistribuita spazialmente: $\bar{I} = 2I_0$.

Parte V

Ottica

In questa parte ci occuperemo delle caratteristiche della luce.

Misura della velocità della luce

Un primo problema che dobbiamo porci riguarda la misura della velocità della luce. Già G. Galilei esclude che si potesse effettuare una misura della velocità della luce mediante osservazione diretta. Nel celebre esperimento della lanterna egli pose un limite superiore alla velocità della luce: essa deve essere tale che il tempo impiegato dalla luce per percorrere una distanza di qualche chilometro sia al di sotto del tempo di riflesso umano. Successivamente con un apparato sperimentale più raffinato H. Fizeau riuscì a calcolare la velocità della luce. Egli usò una lampadina che generava lampi di luce essendo posta dietro ad una pala rotante di cui si poteva regolare la velocità. Ad una distanza di alcuni chilometri pose uno strumento, denominato "occhio di gatto", in grado di rimandare la luce esattamente parallela alla direzione di provenienza. Regolò poi la velocità della pala in modo da non vedere mai la luce di ritorno e da questo dedusse la velocità della luce. Il valore della velocità della luce nel vuoto oggi pressoché universalmente accettato è di $c = 310^8 \frac{m}{s}$.

Resta ora da porsi la questione della luce nei mezzi. La luce si propaga nei mezzi trasparenti, ma si muove con diversa velocità. In particolare, si definisce, detta v la velocità della luce in un certo mezzo, la quantità $n = \frac{c}{v}$, detta *indice di rifrazione*. Poiché la velocità della luce nel vuoto è insuperabile, vale in particolare $n \geq 1$. Valori tipici dell'indice di rifrazione vanno da 1 a 2.5.

15 Ottica geometrica

15.1 Principio di Fermat

Come ottimizza la luce il proprio cammino? Cioè, se un raggio di luce (per il momento non discutiamo che cosa significhi l'espressione, in effetti un po' ambigua, "raggio") deve andare da un punto dello spazio ad un altro, attraversando mezzi differenti, quale percorso segue? Potrebbe ottimizzare lo spazio percorso, percorrendo così il segmento più corto, cioè la distanza tra i due punti. Oppure potrebbe ottimizzare il tempo, percorrendo il segmento che impiega meno tempo a percorrere. A questa domanda risponde il principio di Fermat.

Legge V.1 (Principio di Fermat). *La luce, nel propagare, sceglie il percorso cui compete il minimo tempo di percorrenza possibile*

Osservazione V.1. *Una importante conseguenza del principio di Fermat è la reversibilità dei cammini ottici. Cioè se la luce effettua un certo percorso per andare dal punto A al punto B, tale percorso per il principio di Fermat è il più veloce. Ma allora è anche, percorso in senso inverso, il più veloce percorso per andare da B ad A.*

15.2 Principio di Huygens

Supponiamo che un'onda luminosa raggiunga i punti di una certa superficie σ . Come proseguirà l'onda?

Legge V.2 (Principio di Huygens). *I vari punti della superficie σ , quando vengono raggiunti dalla perturbazione, diventano sorgenti di onde secondarie sferiche, il cui inviluppo costituisce il fronte d'onda oltre la superficie σ .*

15.3 Legge di Snell-Cartesio

La luce è sottoposta a fenomeni di rifrazione, che avvengono quando un raggio attraversa la superficie di separazione tra due materiali avente indice di rifrazione diverso. Questo fenomeno è regolato dalla legge di Snell-Cartesio. Posti θ_1 e θ_2 gli angoli d'incidenza e di trasmissione, e n_1 e n_2 i relativi indici di rifrazione:

Legge V.3 (Legge di Snell-Cartesio).

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (15.3.1)$$

Eseguiamo due diverse dimostrazioni della legge di Snell-Cartesio, una a partire dal principio di Fermat, l'altra dal principio di Huygens.

15.3.1 Dimostrazione a partire dal principio di Fermat

Dimostrazione. Il tempo impiegato dalla luce, rispettivamente, nel primo e nel secondo mezzo, è dato da:

$$t_1 = \frac{SO}{v_1} \quad t_2 = \frac{PO}{v_2} \Rightarrow t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{v_2} \quad (15.3.2)$$

Per il principio di Fermat sappiamo che il percorso della luce deve essere il più breve possibile in termini di tempo. Deriviamo allora su x ed imponiamo un minimo:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{a-x}{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0 \quad (15.3.3)$$

Segue:

$$\frac{1}{v_1} \sin \theta_i = \frac{1}{v_2} \sin \theta_t \quad (15.3.4)$$

Moltiplicando entrambi i membri per c si ottiene la legge di Snell-Cartesio. \square

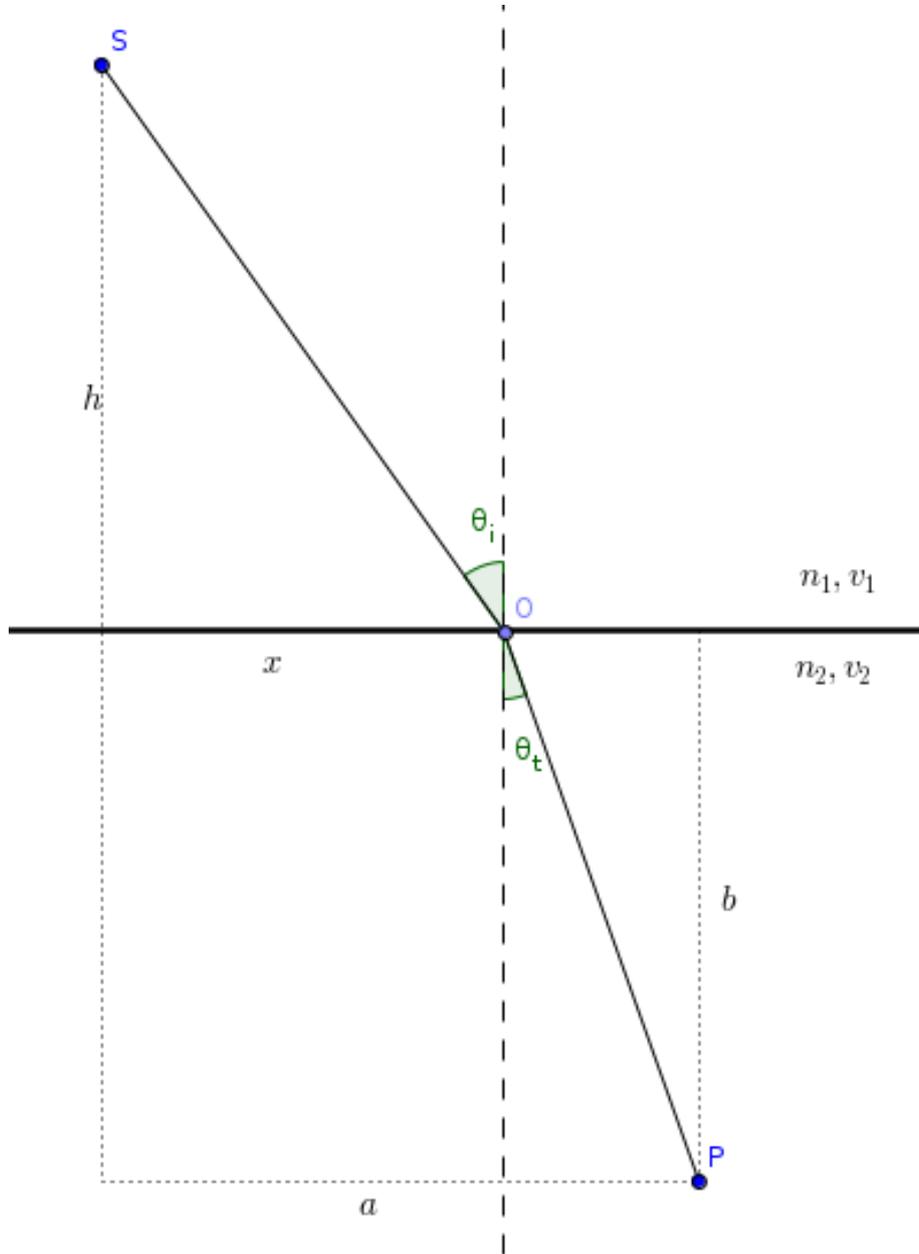


Figura 8: Schema del sistema descritto per la dimostrazione della legge di Snell-Cartesio a partire dal principio di Fermat.

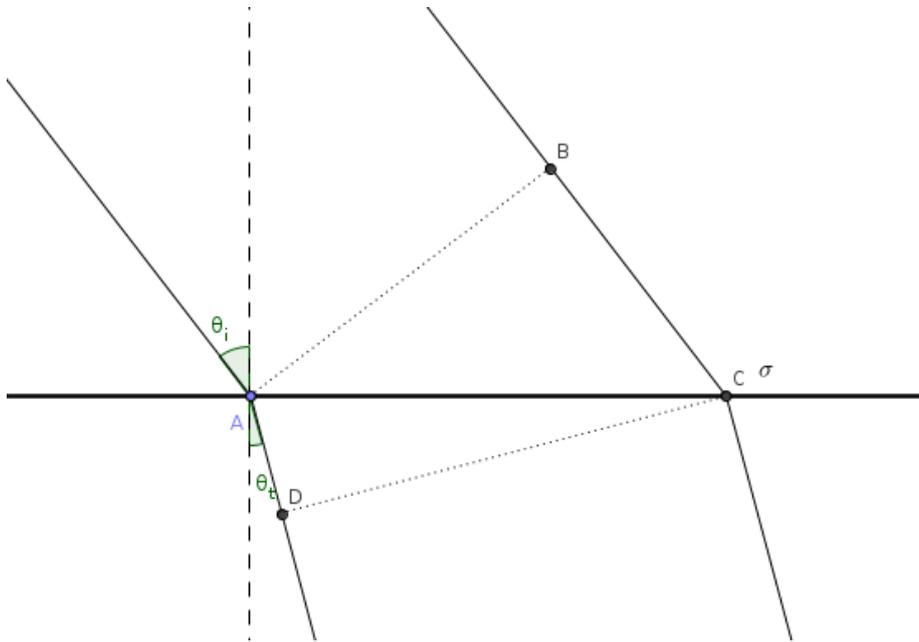


Figura 9: Schema del sistema descritto per la dimostrazione della legge di Snell-Cartesio a partire dal principio di Huygens.

15.3.2 Dimostrazione a partire dal principio di Huygens

Dimostrazione. Chiamiamo ψ la perturbazione. Quando ψ raggiunge per la prima volta la superficie σ in A , manca ancora un tempo $t = \frac{BC}{v_1}$ perché la perturbazione raggiunga il punto C . Nello stesso tempo al di là della superficie la perturbazione ha raggiunto il punto D . Vale dunque l'equazione:

$$\frac{BC}{v_1} = \frac{AD}{v_2} \Rightarrow \frac{BC}{AC} \frac{c}{v_1} = \frac{AD}{AC} \frac{c}{v_2} \Rightarrow n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (15.3.5)$$

□

15.4 Legge della riflessione

La riflessione è il fenomeno per cui un'onda che raggiunge una certa superficie di separazione tra due mezzi viene rimandata nel mezzo da cui proviene. Vale la seguente legge che governa la riflessione, detti θ_i l'angolo d'incidenza e θ_r l'angolo di uscita:

$$\theta_i = \theta_r \quad (15.4.1)$$

Anche qui dimostriamo la legge dapprima a partire dal principio di Fermat e poi da quello di Huygens.

15.4.1 Dimostrazione a partire dal principio di Fermat

Dimostrazione. Il tempo impiegato per percorrere i due segmenti è, rispettivamente:

$$t_1 = \frac{SO}{v} \quad t_2 = \frac{PO}{v} \quad (15.4.2)$$

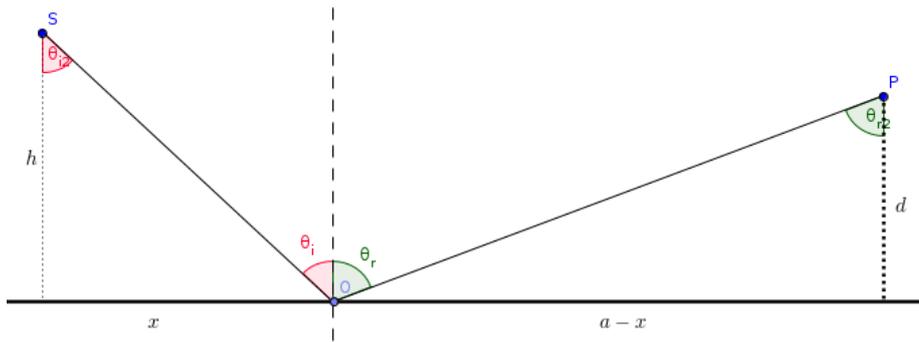


Figura 10: Schema del sistema descritto per la dimostrazione della legge di riflessione a partire dal principio di Fermat.

Sommando:

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{d^2 + (a-x)^2}}{v} \quad (15.4.3)$$

Per il principio di Fermat questa quantità deve essere la minore possibile. Derivo su x :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \left(\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{d^2 + (a-x)^2}} \right) = 0 \quad (15.4.4)$$

Da cui segue:

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad (15.4.5)$$

Ma poichè gli angoli sono nel primo quadrante questo equivale alla tesi. \square

15.4.2 Dimostrazione a partire dal principio di Huygens

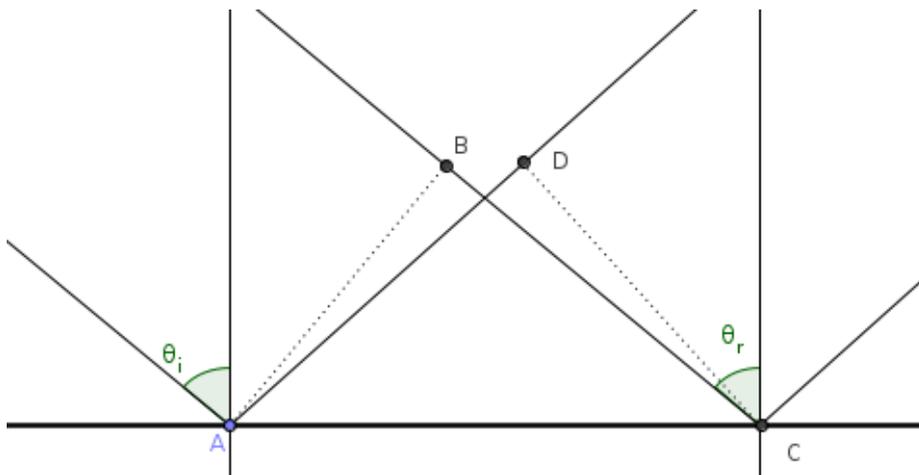


Figura 11: Schema del sistema descritto per la dimostrazione della legge della riflessione a partire dal principio di Huygens.

Dimostrazione. I triangoli ABC e ACD sono rettangoli e congruenti. Infatti:

- Gli angoli ADC e CBA sono retti e quindi congruenti;
- AC è in comune
- BC e AD sono congruenti perché la luce percorre spazi uguali in tempi uguali.

Segue in particolare la tesi. \square

15.5 Costruzione dell'immagine

Ci occupiamo ora della costruzione dell'immagine, a partire dai diottri per poi procedere con lenti e specchi.

15.5.1 L'approssimazione parassiale

Nei calcoli che seguono lavoreremo sempre in *approssimazione parassiale*. Supporremo cioè che tutti gli angoli a cui viaggiano rispetto all'asse ottico i raggi di luce siano sufficientemente piccoli perché tutti i seni e le tangenti degli angoli stessi siano approssimabili agli angoli. Questa approssimazione è molto diffusa come "prima approssimazione" prima di eseguire calcoli più precisi e complessi.

15.5.2 Diottro piano

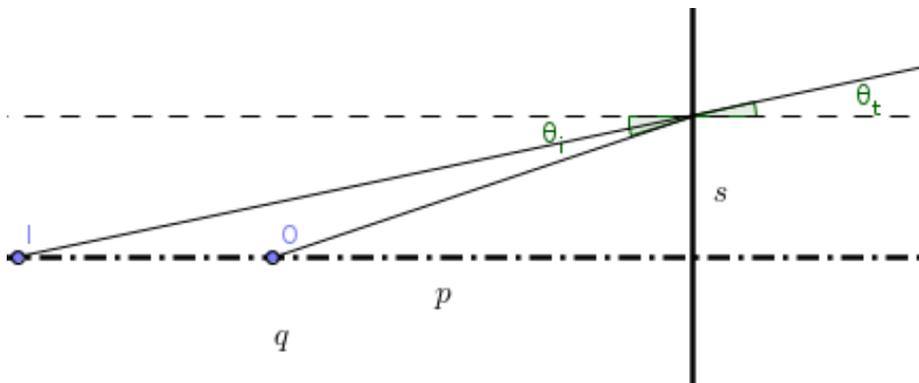


Figura 12: Schema del sistema descritto per la costruzione dell'immagine da un diottro piano.

Un diottro è una regione di spazio completamente occupata da un dato materiale di indice di rifrazione noto. L'aggettivo "piano" si riferisce alla forma della superficie di separazione.

Legge V.4. Sia p la distanza tra il diottro e l'oggetto, sia q la distanza tra l'oggetto e l'immagine. Sino n_1, n_2 i due indici di rifrazione. Allora vale la legge:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = 0 \quad (15.5.1)$$

Dimostrazione. Applicando la legge di Snell, si ha:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (15.5.2)$$

In approssimazione parassiale possiamo scrivere:

$$n_1 \theta_i = n_2 \theta_t \quad (15.5.3)$$

Si ha inoltre:

$$\frac{s}{p} = \tan \theta_i \sim \theta_i \quad \frac{s}{-q} = \tan \theta_t \sim \theta_t \quad (15.5.4)$$

Sostituendo nella precedente si ha la tesi. \square

Un diottro piano genera *sempre* immagini *virtuali*, cioè che si trovano nello stesso semispazio dell'oggetto.

15.5.3 Diottro sferico

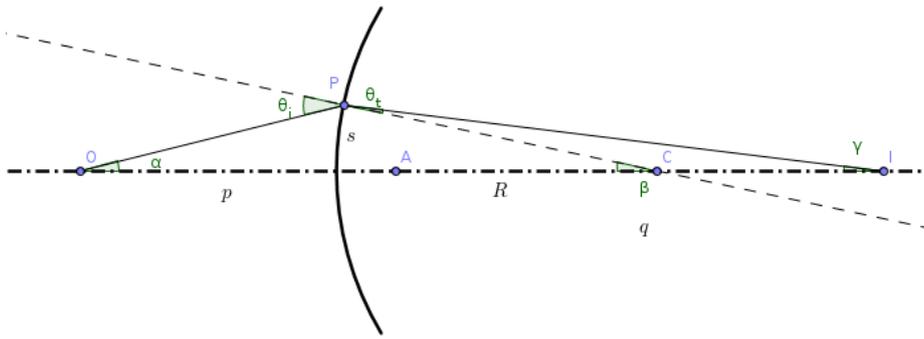


Figura 13: Schema del sistema descritto per la costruzione dell'immagine da un diottro sferico.

Legge V.5. Sia p la distanza tra il diottro e l'oggetto, sia q la distanza tra l'oggetto e l'immagine. Sino n_1, n_2 i due indici di rifrazione. Sia R il raggio di curvatura del diottro. Allora vale la legge:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (15.5.5)$$

Dimostrazione. Posti gli angoli indicati in figura, valgono le seguenti equazioni:

- $\theta_i = \alpha + \beta$ perché supplementari allo stesso angolo;
- $\beta = \theta_t + \gamma$ perché supplementari allo stesso angolo;
- $n_1 \theta_i = n_2 \theta_t$ per la legge di Snell-Cartesio scritta in approssimazione parassiale.

Segue, per sostituzione:

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \quad (15.5.6)$$

Ma valgono le relazioni (sempre scritte in approssimazione parassiale):

$$\beta = \frac{s}{R} \quad \alpha = \frac{s}{p} \quad \gamma = \frac{s}{q} \quad (15.5.7)$$

E sostituendo segue la tesi. \square

Si definiscono *fuochi* del diottro sferico i punti in cui vengono focalizzati raggi paralleli. Ricaviamo la loro posizione. Raggi paralleli che "vedono" il diottro concavo equivalgono, nella nostra costruzione, a raggi con $q = \infty$. Essi vengono dunque concentrati nel punto:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{Rn_1} \quad (15.5.8)$$

Raggi che "vedono" il diottro convesso sono invece focalizzati in:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{Rn_2} \quad (15.5.9)$$

Un cenno meritano le convenzioni sui segni. Usiamo il segno positivo per tutto ciò che si trova nel semipiano "giusto". Cioè se l'immagine si trova nel semipiano in cui viaggiano raggi rifratti allora q ha segno positivo, e così via. Inoltre un diottro convesso dal punto di vista dell'oggetto ha raggio di segno positivo, un diottro concavo di segno negativo. Infine, ci chiediamo di quanto sia ingrandita

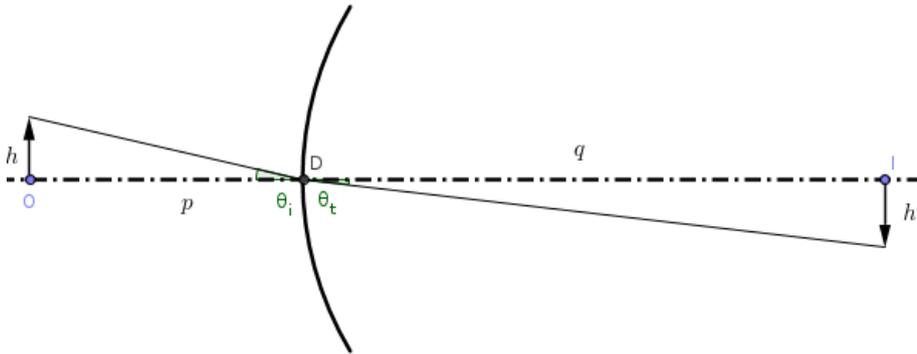


Figura 14: Schema del sistema descritto per la valutazione dell'ingrandimento dell'immagine da un diottro sferico.

l'immagine costruita tramite il diottro sferico. Seguendo la nomenclatura della figura, sappiamo che in approssimazione parassiale

$$\frac{h}{p} = \theta_1 \quad \frac{-h'}{q} = \theta_2 \quad (15.5.10)$$

Da cui l'ingrandimento m vale:

$$m = \frac{h'}{h} = -\frac{\theta_2 q}{\theta_1 p} = -\frac{n_1 q}{n_2 p} \quad (15.5.11)$$

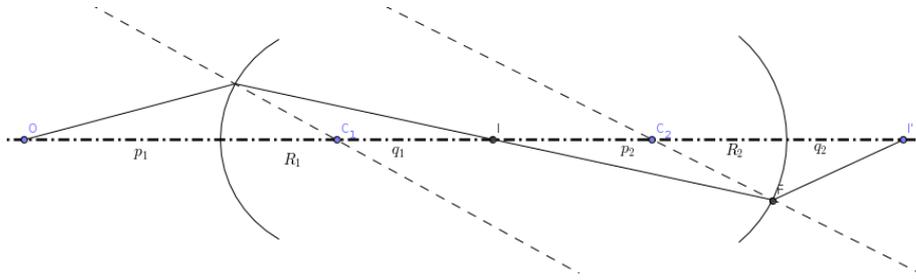


Figura 15: Schema del sistema descritto per la costruzione dell'immagine da una lente.

15.5.4 Lente

Studiamo ora la lente, che è pensabile come una coppia di opportuni diottri posti l'uno dopo l'altro lungo il cammino ottico. Studiamo in particolare il caso della cosiddetta *lente sottile*, cioè tale che la distanza tra i due diottri che la formano si possa ritenere infinitesima.

Legge V.6 (Legge del costruttore di lenti). *In una lente sottile costruita con materiale di indice di rifrazione n_2 e immersa in un materiale con indice di rifrazione n_1 con raggi di curvatura rispettivi R_1 e R_2 vale l'equazione (legge del costruttore di lenti):*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15.5.12)$$

Dimostrazione. Consideriamo la lente come formata da due diottri sferici con i raggi uguali ai due raggi della lente. Abbiamo così le equazioni:

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad ; \quad \frac{n_2}{p_2} + \frac{n_1}{q_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (15.5.13)$$

Sommando si ottiene:

$$n_2 \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} \right) + n_1 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} \right) = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15.5.14)$$

E applicando l'approssimazione di lente sottile:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15.5.15)$$

Che è la tesi. □

Si possono calcolare i fuochi, che sono in questo caso simmetrici, ottenendo:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15.5.16)$$

Spesso allora si scrive la (15.5.15) nella forma:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (15.5.17)$$

nota come *legge dei punti coniugati*. L'ingrandimento è dato dal prodotto dell'ingrandimento dei diottri:

$$m = -\frac{q}{p} \quad (15.5.18)$$

Per quanto riguarda le convenzioni sui segni, gli elementi virtuali (nel semipiano "sbagliato") si indicano con il segno negativo. Inoltre i raggi convessi sono positivi, quelli concavi negativi. Una lente si dice *convergente* se la sua distanza focale è positiva, *divergente* se la sua distanza focale è negativa.

15.5.5 Specchio piano

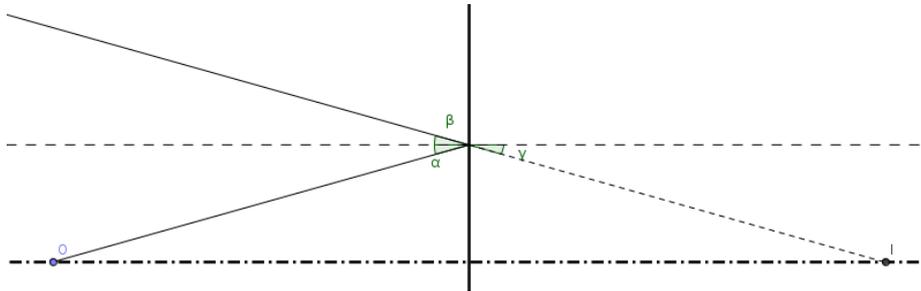


Figura 16: Schema del sistema descritto per la costruzione dell'immagine da uno specchio piano.

Legge V.7. In uno specchio piano vale la legge, se p è la distanza dell'oggetto dallo specchio e q la distanza dell'immagine dallo specchio:

$$|q| = |p| \quad (15.5.19)$$

Dimostrazione. La tesi segue direttamente dall'uguaglianza degli angoli α , β , γ . \square

15.5.6 Specchio curvo

Legge V.8. In uno specchio curvo di raggio R se poniamo un oggetto a distanza p dallo specchio otteniamo un'immagine a distanza q dallo stesso secondo l'equazione:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \quad (15.5.20)$$

Dimostrazione. Dalla supplementarietà allo stesso angolo ricaviamo le due equazioni:

$$\alpha + \theta = \beta \quad \beta + \theta = \gamma \quad (15.5.21)$$

Sommando:

$$\alpha + \gamma = 2\beta \quad (15.5.22)$$

Ma valgono le relazioni, scritte in approssimazione parassiale:

$$\beta = \frac{s}{R} \quad \alpha = \frac{s}{p} \quad \gamma = \frac{s}{q} \quad (15.5.23)$$

Sostituendo segue la tesi. \square

Per quanto riguarda l'ingrandimento, vale la stessa legge che vale per le lenti.

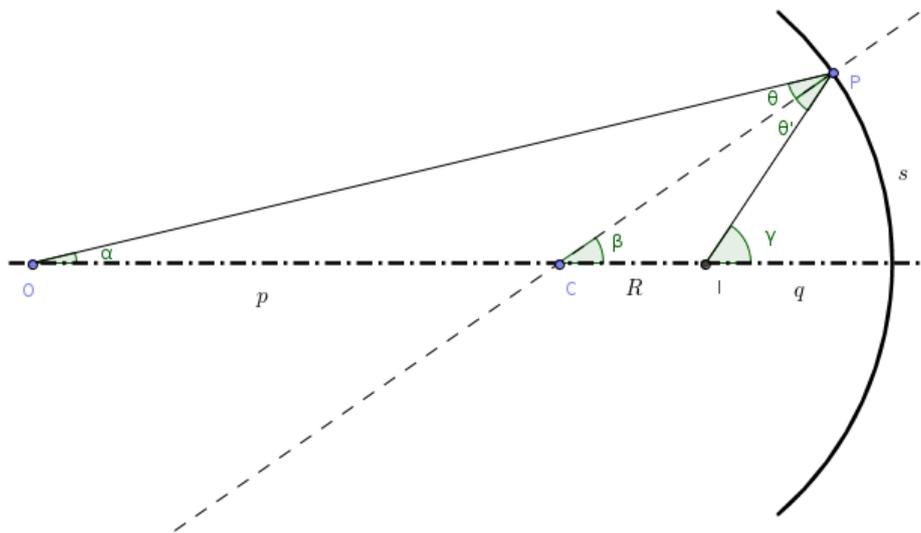


Figura 17: Schema del sistema descritto per la costruzione dell'immagine da uno specchio sferico.

15.6 Complementi

15.6.1 Il telescopio di Keplero

Cominciamo a dare qualche informazione sul funzionamento dell'occhio. Esso presenta una lente, il *crystallino*, di curvatura variabile. In particolare, è fissa la distanza di formazione dell'immagine che è data dalla distanza tra il cristallino stesso e la retina: $q \sim 2 \text{ cm}$. L'occhio in condizione di riposo presenta $q = f$, cioè vede oggetti che si trovano all'infinito. Un dispositivo ottico finalizzato a formare l'immagine nell'occhio deve dunque emettere raggi paralleli.

Consideriamo ora il telescopio di Keplero. Esso è formato da due lenti convergenti, dette rispettivamente *obiiettivo* ed *oculare*. Esse sono posizionate in asse e in modo che il secondo fuoco dell'obiiettivo coincida con il primo fuoco dell'oculare. Immaginiamo ora di mandare due raggi provenienti da una distanza virtualmente infinita che presentano un angolo η tra loro. Tale angolo sarà necessariamente molto piccolo, dunque possiamo considerarli paralleli. Allora l'immagine di un segmento portato dai due raggi si forma sul piano focale (immagine $A'B'$). La seconda lente crea una immagine virtuale $A''B''$. Allora l'ingrandimento vale:

$$G_\eta = \frac{\eta'}{\eta} \sim \frac{\tan \eta'}{\tan \eta} = \frac{\frac{A'B'}{QB'}}{\frac{A'B'}{PB'}} = \frac{f_{\text{obiiettivo}}}{f_{\text{oculare}}} \quad (15.6.1)$$

16 Ottica fisica

Ci occupiamo ora dell'ottica fisica, che riguarda lo studio della luce come fenomeno propriamente ondulatorio. Ci occuperemo dunque in particolare di fenomeni di diffrazione e di interferenza.

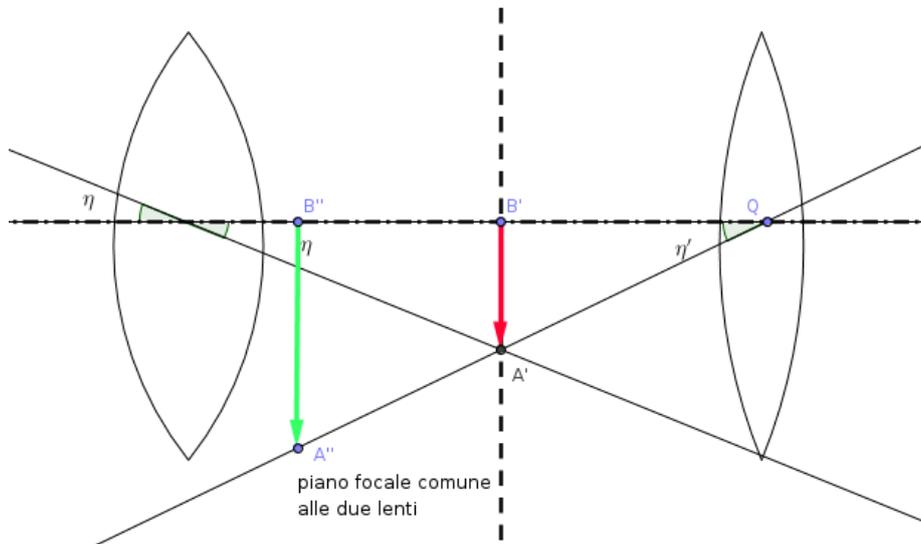


Figura 18: Schema del funzionamento del telescopio di Keplero.

Premessa: lunghezza d'onda in un mezzo

Abbiamo già visto come la velocità della luce vari quando la luce passa dal vuoto ad un certo mezzo. E' altresì noto che la frequenza della luce rimane costante. Secondo la formula (5.4.9) si deve allora avere una variazione della lunghezza d'onda. Chiamiamo λ_0 la lunghezza d'onda di un certo fascio di luce nel vuoto e ci chiediamo quanto valga la lunghezza d'onda λ in un qualche mezzo. Valgono le seguenti due relazioni:

$$c = \lambda_0 \nu \quad v = \lambda \nu \quad (16.0.1)$$

Dividendo membro a membro:

$$\frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (16.0.2)$$

dove n è l'indice di rifrazione del materiale.

16.1 Interferenza su lamine sottili

In questo primo paragrafo ci occupiamo di un fenomeno noto con il nome di *interferenza su lamine sottili*. Supponiamo di avere una lamina di spessore paragonabile ad una lunghezza d'onda, dunque dell'ordine di qualche decina di micrometri. Mandiamo sulla lamina un raggio di luce monocromatica di lunghezza d'onda nota λ con incidenza perpendicolare sulla lastra. Il raggio verrà parzialmente riflesso e parzialmente trasmesso nella lamina. A questo punto raggiungerà l'altro estremo della lamina stessa e una parte della luce verrà ulteriormente riflessa e poi ritrasmessa dalla prima faccia della lamina. A questo punto è possibile una interferenza tra il raggio inizialmente riflesso e quello trasmesso di ritorno. I due hanno una differenza di fase che chiaramente dipende dallo spessore della lamina. Ci possiamo allora chiedere per quale spessore si ha

un minimo di intensità in uscita e per quale si ha invece un massimo. Abbiamo un massimo di interferenza se il raggio riflesso subito e quello di ritorno sono in fase. Poiché essi erano certamente in fase in partenza, dobbiamo avere uno spessore tale che il raggio di ritorno abbia percorso un multiplo intero della lunghezza d'onda. Naturalmente dobbiamo considerare la lunghezza d'onda *nel mezzo* e *non* quella nel vuoto. Allora, detta λ_0 la lunghezza d'onda nel vuoto, si ha:

$$S = \frac{m \lambda_0}{2 n} \quad (16.1.1)$$

e sotto questa condizione si ha un massimo di interferenza, se m è un numero intero. Analogamente, si ha un minimo di interferenza se le onde sono in opposizione di fase, cioè se una percorre un multiplo semiintero della lunghezza d'onda in più. Allora si ha un minimo se:

$$S = \frac{2m + 1 \lambda_0}{2 n} \quad (16.1.2)$$

e m è un numero intero. L'interferenza su lamine sottili è spesso sfruttata nella progettazione di sistemi antiriflesso per minimizzare appunto l'intensità della luce riflessa, ad esempio, dal vetro della lente degli occhiali.

16.2 Diffrazione

La diffrazione si ha quando la luce deve attraversare una fenditura di dimensioni paragonabili alla sua lunghezza d'onda, o quando deve superare un ostacolo avente le medesime caratteristiche. In particolare ci occupiamo della cosiddetta *diffrazione di Fraunhofer*, che costituisce una approssimazione sotto opportune ipotesi della più completa e complessa teoria della *diffrazione di Fresnel*. In particolare, dobbiamo fare le seguenti due ipotesi:

- L'onda che giunge alla fenditura è piana. Cioè, per esempio, è stata emessa da una sorgente puntiforme molto distante oppure è stata "spianata" da una lente convergente nel cui punto focale è posta la sorgente puntiforme.
- L'effetto di diffrazione viene osservato molto lontano dalla fenditura, in condizioni di *far field*.

Supponiamo di avere una fenditura di larghezza a e di altezza l , dove a è paragonabile alla lunghezza d'onda, mentre l è molto più grande. Supponiamo di voler considerare l'effetto della diffrazione in un punto che si trova ad un angolo θ rispetto alla perpendicolare tracciata dal punto centrale della fenditura. Visto che siamo in condizioni di far field, possiamo supporre che i raggi provenienti dalle varie aree della fenditura s'incontrino all'infinito. L'onda elettromagnetica generata da un'area di dimensioni $dy \times l$ è data da:

$$dE = E_0 \cos[k(r + \Delta r(y)) - \omega t] \frac{ldy}{al} \quad (16.2.1)$$

Dove Δr è la differenza di cammino rispetto al raggio che passa per il centro della fenditura e vale dunque $y \sin \theta$. Chiamiamo $\phi = kr - \omega t$ la parte ondulatoria uguale per tutti i punti e $\alpha = k \frac{a}{2} \sin \theta$. Per calcolare il campo elettrico totale

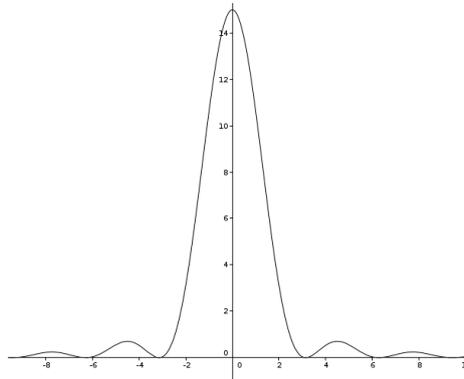


Figura 19: La funzione che descrive l'intensità nella diffrazione, il quadrato del seno cardinale. Plot eseguito con GeoGebra.

nel punto che ci interessa integriamo su tutta la larghezza della fenditura:

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} &= \frac{E_0}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(\phi + ky \sin \theta) dy = \\
 &= \frac{E_0}{ka \sin \theta} \left[\sin \left(\phi + k \frac{a}{2} \sin \theta \right) - \sin \left(\phi - k \frac{a}{2} \sin \theta \right) \right] =
 \end{aligned}$$

Applicando prostaferesi:

$$= \frac{E_0}{\alpha} \sin \alpha \cos \phi \quad (16.2.2)$$

Come è noto, l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza e vale dunque:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \quad (16.2.3)$$

Tale funzione, quadrato del *seno cardinale*, presenta un alto picco centrale (*picco centrale di diffrazione*) e una serie di picchi secondari molto meno significativi. Resta da capire come si relazionino tra loro il pattern di diffrazione da una fenditura e quello da un ostacolo. Una semplice risposta è fornita dal *teorema di Babinet*.

Legge V.9 (Teorema di Babinet). *Eccezion fatta per il punto centrale, il pattern di diffrazione da una fenditura è uguale al pattern di diffrazione del suo complementare (un ostacolo delle medesime dimensioni).*

Dimostrazione. Consideriamo l'onda elettromagnetica generata da una fenditura (E_f) e dal suo ostacolo complementare E_o . Se suppongo di aprire completamente l'area ho che $E = E_f + E_o = 0$ se $\theta \neq 0$, perché le onde viaggiano in linea retta e se giungono parallele al piano rimangono parallele. Di conseguenza: $E_f(\theta) = -E_o(\theta)$. Passando alle intensità si ha dunque che, sempre se $\theta \neq 0$, $I_o = I_f$. \square

16.3 Interferenza alla Young

L'interferenza alla Young, o *da doppia fenditura*, dà luogo ad una combinazione di effetti di diffrazione ed interferenza. Supponiamo di avere una coppia di

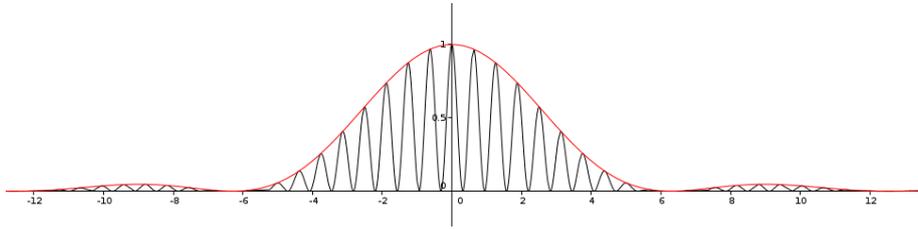


Figura 20: La funzione che descrive l'intensità nell'interferenza. In rosso la modulante curva di diffrazione. Plot eseguito con GeoGebra.

fenditure di larghezza uguale a e tali che la distanza tra i due centri sia d . Applichiamo lo stesso ragionamento che abbiamo visto nel paragrafo precedente, ma questa volta sommando sulle due fenditure:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{E_0}{a} \int_{-\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} \cos(\phi + ky \sin \theta) dy + \frac{E_0}{a} \int_{\frac{d}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{a}{2}} \cos(\phi + ky \sin \theta) dy = \\
 &= \frac{E_0}{ka \sin \theta} [\sin(\phi - \delta - \alpha) - \sin(\phi - \delta + \alpha) + \sin(\phi + \delta - \alpha) - \sin(\phi + \delta + \alpha)] = \\
 &= (\text{applicando prostaferesi}) \frac{E_0}{2\alpha} [2 \sin(-\alpha) \cos(\phi - \delta) + 2 \sin(-\alpha) \cos(\phi + \delta)] = \\
 &= (\text{applicando ancora prostaferesi}) \frac{-E_0 \sin \alpha}{\alpha} 2 \cos \phi \cos \delta = \\
 &= 2E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \phi \cos \delta \quad (16.3.1)
 \end{aligned}$$

Si ottiene dunque una curva d'intensità della forma:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cos^2 \delta \quad (16.3.2)$$

Cioè una funzione $\cos^2 x$ modulata dal quadrato del seno cardinale.

16.4 Reticoli di diffrazione

Poniamo di voler eseguire un esperimento di interferenza alla Young con onde di diversa lunghezza d'onda, ma abbastanza prossime tra loro. Il criterio di Rayleigh ci permette di stabilire se è possibile distinguere con chiarezza i massimi di interferenza generati dalle diverse onde.

Legge V.10 (Criterio di Rayleigh). *E' possibile distinguere tra i massimi di interferenza generati da due onde di diversa lunghezza d'onda se il primo massimo di interferenza per la prima lunghezza d'onda coincide almeno con il primo minimo d'interferenza della seconda.*

Osservazione V.2 (Disco di Airy). *Il criterio di Rayleigh permette in generale di stabilire quando due oggetti sono distinguibili ("risolti") da un apparato ottico. Ad esempio consideriamo due sorgenti puntiformi. Esse generano una figura di diffrazione nota come disco di Airy. Il raggio di tale disco costituisce il minimo di diffrazione. Allora due oggetti sono distinguibili se la distanza tra due centri è maggiore del raggio del disco di Airy di ciascuno.*

Se vogliamo rispettare le condizioni di Rayleigh per una doppia fenditura calcoliamo facilmente che, indipendentemente dalle caratteristiche della stessa, non possiamo scendere sotto un rapporto di 2 tra le lunghezze d'onda valutate. Bisogna costruire un dispositivo ottico che permetta di migliorare questa situazione: il *reticolo di diffrazione*. Esso è un dispositivo formato da N righe tutte parallele e corrisponde di fatto ad un gran numero di doppie fenditure. L'onda uscente dalla n -esima fenditura è data da:

$$E_n = E_0 \cos \left(\phi + nkd \sin \theta - \frac{N-1}{2} kd \sin \theta \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (16.4.1)$$

dove i simboli hanno il significato già definito in precedenza. Osservo che i termini argomento del coseno oltre al termine ondulatorio ϕ sono termini di differenza di cammino. In particolare, $nkd \sin \theta$ dà la differenza di cammino del raggio rispetto a quello uscente dalla prima fenditura del reticolo, mentre $\frac{N-1}{2} kd \sin \theta$ permette di riscalarlo centrandolo sul punto centrale del reticolo, che risulta molto più comodo a livello di conti. Sommando su tutte le fenditure (e passando per comodità alla scrittura complessa delle funzioni goniometriche) si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{N-1} E_n = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i\phi} e^{-\frac{i}{2}(N-1)kd \sin \theta} \sum_{n=0}^N e^{inkd \sin \theta} \quad (16.4.2)$$

Utilizzando la formula di somma per le serie geometriche abbiamo:

$$\sum_{n=0}^N e^{2in\delta} = \frac{1 - e^{2i\delta N}}{1 - e^{2i\delta}} = \frac{e^{i\delta N}}{e^{i\delta}} \frac{e^{-i\delta N} - e^{i\delta N}}{e^{-i\delta} - e^{i\delta}} \frac{2i}{2i} = \quad (16.4.3)$$

Applicando le formule di Eulero:

$$= \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \quad (16.4.4)$$

Tornando all'onda sommata su tutte le fenditure si ha:

$$E = E_0 e^{i\phi} \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (16.4.5)$$

Da cui l'intensità risulta:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2 \delta} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \quad (16.4.6)$$

Vogliamo ora ragionare sulle caratteristiche che rendono così interessante il reticolo di diffrazione. Analizziamo in particolare le sue due maggiori proprietà, cioè la *dispersione angolare* e la *larghezza angolare* di un massimo. Per comodità, supponiamo che il numero delle fenditure sia pari. Vogliamo imporre la condizione di minimo, e lo facciamo supponendo di dividere il reticolo in due metà e di indicare con A, B, C, \dots le fenditure della prima e con A', B', C', \dots quelle della seconda. Vogliamo che il fascio uscente da A sia in condizione di *controfase* con il fascio uscente da A' . Allora imponiamo, posto che la differenza di cammino è data evidentemente da $\Delta r = \frac{N}{2} d \sin \theta$:

$$\frac{N}{2} d \sin \theta = \frac{N}{2} m\lambda + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow N d \sin \theta_{min} = Nm\lambda + \lambda \quad (16.4.7)$$

E ora la condizione di massimo, ragionando in modo analogo:

$$Nd \sin \theta_{max} = Nm\lambda \quad (16.4.8)$$

Sottraendo:

$$Nd(\sin \theta_{min} - \sin \theta_{max}) = \lambda \Rightarrow Nd\Delta\theta \frac{\sin(\theta_{max} + \Delta\theta) - \sin \theta_{max}}{\Delta\theta} = \lambda \quad (16.4.9)$$

Considerando ora che $\Delta\theta \rightarrow 0$ si ha:

$$Nd\Delta\theta \cos \theta_{max} = \lambda \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_{max}} \quad (16.4.10)$$

Tale è la *larghezza angolare* di un massimo.

Vogliamo ora individuare la dispersione angolare⁶, cioè la distanza tra due massimi del medesimo ordine dati da onde di lunghezza d'onda differente. Supponiamo in particolare che la differenza di lunghezze d'onda $\Delta\lambda$ sia molto piccola. Allora:

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (16.4.11)$$

Differenziando si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta(d \sin \theta) &= \delta(m\lambda) \Rightarrow d\Delta \sin \theta = m\Delta\lambda \\ \Rightarrow (\text{supponendo che disp } \theta \text{ sia piccolo}) d \text{ disp } \theta \cos \theta & \\ \Rightarrow \text{disp } \theta &= \frac{m\Delta\lambda}{d \cos \theta} \end{aligned} \quad (16.4.12)$$

Applico ora il principio di Rayleigh: la distanza (in questo caso angolare) tra due massimi deve essere almeno uguale alla larghezza angolare di un massimo:

$$\Delta\theta = \text{disp } \theta \Rightarrow \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_{max}} = \frac{m\Delta\lambda}{d \cos \theta} \quad (16.4.13)$$

E si definisce il *potere risolutivo* del reticolo:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} = mN \quad (16.4.14)$$

16.5 Polarizzazione

Trattiamo ora la *polarizzazione*. Essa è una proprietà delle sole onde trasversali. Consideriamo ad esempio un'onda elettromagnetica trasversale. La sua equazione può essere espressa come una funzione a valori vettoriali:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t) \quad (16.5.1)$$

Cioè come:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.5.2)$$

L'ultima coordinata come noto è nulla perché non si ha oscillazione nella direzione di propagazione, per definizione di onda trasversale. La polarizzazione riguarda la relazione che sussiste tra le fasi delle componenti dell'onda, cioè il valore di ϕ . Abbiamo due casi significativi:

⁶Uso qui la scrittura $\text{disp } \theta$ per la dispersione angolare. Infatti il simbolo standard è $\Delta\theta$, ma si rischia confusione con la larghezza angolare.

- **polarizzazione lineare** se $\phi = 0$. In questo caso infatti si ha che le due onde hanno massimi e minimi in corrispondenza dei medesimi punti. Di conseguenza la somma (vettoriale) delle due onde è sempre sul medesimo piano.
- **polarizzazione circolare** se $\phi = \frac{\pi}{2}$. In questo caso le due onde sono in quadratura di fase (come una funzione sinusoidale e una cosinusoidale) e quindi il piano su cui giace il vettore somma ruota in modo uniforme circolarmente.

In generale la luce emessa da sorgenti termiche (una stella, una lampadina, etc.) non è polarizzata. Tuttavia si verifica che, data una superficie di separazione tra due materiali aventi indice di rifrazione diversi, esiste un angolo, detto *angolo di Brewster* tale per cui se la radiazione incide sulla superficie con quell'angolo, quella parte che della radiazione viene riflessa risulta polarizzata parallelamente alla superficie. Ricaviamo il valore dell'angolo di Brewster nel caso particolare in cui la radiazione sia tale per cui il raggio riflesso formi un angolo retto con il raggio rifratto. Immaginiamo che la polarizzazione del raggio entrante sia casuale, quindi scrivibile come una qualsiasi funzione vettoriale sulle due coordinate perpendicolari alla direzione di propagazione. Quando la radiazione viene rifratta e riflessa giungendo sulla superficie, risulta che una delle due direzioni viene annullata, poiché viene a coincidere con la direzione di propagazione del raggio riflesso. Di conseguenza il raggio riflesso risulta polarizzato. Applicando la (15.3.1) si ha:

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right) \Rightarrow n_1 \sin \theta_B = n_2 \cos \theta_B \quad (16.5.3)$$

Da cui segue un modo semplice per calcolare l'angolo di Brewster:

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad (16.5.4)$$

Un metodo più semplice per l'ottenimento delle onde elettromagnetiche polarizzate è l'utilizzo di materiali *dicroici*, cioè tali per cui la luce che li attraversa deve avere una direzione preferenziale di polarizzazione. Considerando un materiale dicroico e un fascio polarizzato con un angolo θ rispetto alla direzione preferenziale di propagazione, il materiale si limita a proiettare il vettore campo elettrico nella direzione preferenziale. Quindi:

$$E_{dicroico} = E_{iniziale} \cos \theta \Rightarrow I_{dicroico} = I_{iniziale} \cos^2 \theta \quad (16.5.5)$$

Quest'ultima equazione è nota con il nome di *legge di Malus*.